Romeo Mario

Appunti di Geometria 2

Dalle lezioni del professore Fabrizio Broglia e
dal professore Iacopo Gandini

2018/2019

Prefazione

Questi sono gli appunti del corso di Geometria 2 dell'univarsità di matematica a Pisa dell'anno 2018/2019 tenuto dal docente Fabrizio Broglia, e dall'esercitatore Iacopo Gandini. Sono incompleti e ci posso essere degli errori. (Ultimo aggiornamento 12/05/21)

Indice

Rudimenti di topologia generale

Capitolo 1

Teoria degli insiemi

1.1 Spazio topologico

Il metodo assiomatico usato in matematica ha lo scopo di descrivere gli oggetti matematici per assiomi, però non spiega il perchè si usano questi assiomi per descriverlo quindi non partirò dando subito una definizione di spazio topologico ma da vari esempi che mi porteranno a dedurre gli assiomi che mi definiranno la topologia.
Voglio innanzi tutto spiegare il concetto di continuità (concetto che in natura non esiste). La continuità è un concetto locale, una funzione è continua se è solo se è continua in ogni suo punto (lo avrete già visto nei corsi di analisi 1), e la continuità locale è strettamente legata al concetto di limite (in analisi 1 sicuramente avrete visto che f è continua in x_0 se il limite di x in x_0 di f è $f(x_0)$). Osserviamo che la conoscenza dei numeri reali $\mathbb{R}$ ci da la possibilità di introdurre il concetto di *sup* e inf (assioma di completezza dei reali) e di conseguenza introdurre il concetto di limite che ci porta a parlare di continuità. C'è apparentemente un legame tra continuità e $\mathbb{R}$, ma è veramente necessario? voglio poter definire la continuità senza passare da $\mathbb{R}^n$.

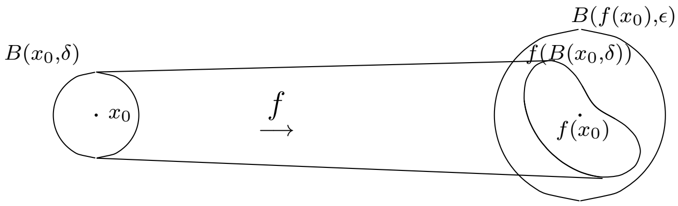
1.1.1 Definizione : Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, si dice *continua secondo* ϵ, δ se e solo se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Avrete sicuramente dimostrato nei corsi di analisi 1 l'equivalenza fra la continuità ϵ, δ con la cintinuità con limite, quindi possiamo usare la definizione 1.1.1. In questa definizione ho usato due concetti che non ho menzionato prima, ovvero il concetto di palla e di distanza. La distanza non è altro che una applicazione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ inoltre $d(x, y) = d(y, x)$ ed in conclusione vale la proprietà triangolare : per ogni z vale $d(x, y) < d(x, z) + d(z, y)$. La distanza e ciò che definisce uno spazio metrico, tutto questo verrà approfondito in seguito. Ora definiamo il concetto di palla :

1.1.2 Definizione : L'insieme $B(a, \epsilon) = \{x \mid d(x, a) < \epsilon\}$ e detto *palla aperta*. L'insieme

$\overline{B(a,\epsilon)} = \{x \mid d(x,a) \leq \epsilon\}$ e detto *palla chiusa.*

Con questa nuova terminologia la definizione di continuità si può anche esprimere dicendo : per ogni x_0 per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $B(x_0,\delta) \Longrightarrow f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\epsilon)$, come si può vedere dal disegno :



(Figura 1)

Le due definizioni sono banalmente equivalenti.

1.1.3 Definizione : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è *aperto* $\Longleftrightarrow$ per ogni $x \in \Omega$ esiste $B(x,\epsilon) \subset \Omega$.

1.1.1 Proposizione : Una palla aperta è un aperto.

Dimostrazione : Devo sostanzialmente vedere per ogni punto della palla esiste una palla, contenente il punto, tutta contenuta in questa. Quindi abbiamo $B(a,\epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,a) < \epsilon\}$, dimostriamo che per ogni $y \in B(a,\epsilon)$ esiste $B(y,\delta) \subset B(a,\epsilon)$. A questo proposito scelgo $\delta = \epsilon - d(a,y)$, questa scelta va bene perchè $0 < d(a,y) < \epsilon$ quindi $0 < \delta < \epsilon$, devo ora mostrare che con questa scelta $B(y,\delta) \subset B(a,\epsilon)$. Per ogni $z \in B(y,\delta)$ si ha che $d(z,a) < \delta$, ora per la proprietà triangolare $d(z,a) < d(z,y) + d(y,a) < \epsilon - d(y,a) + d(y,a) = \epsilon$ quindi $z \in B(a,\epsilon)$. $\square$

In queste prime definizioni abbiamo visto che possiamo definire la continuità indipendentemente dalla struttura di $\mathbb{R}$, ma usando il concetto di distanza. La distanza induce una struttura metrica (presente anche in $\mathbb{R}$) quindi abbiamo astratto il concetto di continuità in una qualsiasi struttura metrica. Abbiamo inoltre visto che la distanza induce la nozione di palla aperta e di aperto, ma il concetto di aperto è legato intrinsecamente a quello di distanza? voglio adesso cercare di esprimere la continuità senza però passare da una distanza ma dal concetto di aperto, quindi astrarre ancora di più e cercare di definire la distanza in uno spazio più generale.

1.1.2 Proposizione : $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è continua $\Longleftrightarrow$ per ogni aperto $\Omega \in \mathbb{R}^m \Longrightarrow\ f^{-1}(\Omega)$ è aperto di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione :

$(\Longrightarrow)$: f continua. Prendo Ω aperto di $\mathbb{R}^m$, devo dimostrare che $f^{-1}(\Omega)$ è aperto ovvero che ogni suo punto esiste una palla che contiene il punto stesso e sta tutta dentro $f^{-1}(\Omega)$. Quindi per ogni $x \in f^{-1}(\Omega)$ si ha che $f(x) \in \Omega$ ma Ω è aperto quindi esiste ϵ tale che $f(x) \in B(f(x), \epsilon) \subset \Omega$ ma per continutà di f esiste δ tale che $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon) \Longrightarrow B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ quindi $x \in B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon)) \subset f^{-1}(\Omega)$ dunque $f^{-1}(\Omega)$ aperto.
$(\Longleftarrow)$: Ω aperto $\Longrightarrow$ $f^{-1}(\Omega)$ aperto. Quindi per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\epsilon > 0$ considero la palla $B(f(x_0), \epsilon)$, che è un aperto in particolare. So che $f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon))$ è un aperto quindi per ogni suo punto esiste una palla di centro il punto e tutta contenuta nell'aperto, quindi in particolare esiste δ tale che $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \epsilon))$ e quindi banalmente $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \epsilon)$.
□

Con questa proposizione ho definito la continuità a partire dal concetto di aperto e ho visto che è equivalente alla continuità in uno spazio metrico, usando cioè una distanza. Non mi sono ancora del tutto staccato dalla distanza, infatti quando ho definito un aperto ho usato però che ogni suo punto è contenuto in una palla e la palla l'ho definita a partire da una distanza, per risolvere questo inghippo ricordiamo che in particolare una palla è un aperto (proposizione 1.1.1) e potrei definire che un insieme è aperto se ogni suo punto è contenuto in aperto che a sua volta è tutto contenuto nell'insieme, e per fare ciò ho bisogno di definire uno spazio dove i suoi elementi sono per definizione aperti. In conclusione ho ottenuto che posso basare la mia teoria sul concetto di aperto devo quindi costruire una struttura dove i suoi elementi base sono gli aperti, e perciò arriviamo alla definizione :

1.1.4 Definizione : Uno *spazio topologico* $\overline{X}$ è una coppia (X, τ) dove X è un insieme e τ è una classe di sottoinsiemi di X, detta *topologia*, tale che valgono le seguenti proprietà :

1) τ contiene X e $\emptyset$.

2) Se una famiglia, anche infinita, $\{A_i\}$ di sottoinsiemi di X sta in τ allora anche la loro unione $\bigcup A_i$ sta in τ

3) Se una famiglia finita di sottoinsiemi di X sta in τ allora anche la loro intersezione $\bigcap A_i$ sta in τ.

Quindi τ è chiuso per unione infinita ed intersezione finita. Gli elementi di τ sono detti *aperti*.

Voglio vedere che con questa definizione gli aperti definiti nella definizione 1.1.3 hanno struttura di topologia.

1.1.3 Proposizione : L'insieme degli aperti della definizione 1.1.3 è una topologia.

Dimostrazione : $X, \emptyset$ sono aperti. L'unione di aperti $\bigcup A_i$ è un aperto infatti preso un punto x dell'unione, questo sta anche in A_i per un certo i ma A_i è un aperto quindi contiene una palla aperta che contiene x e questa palla sta anche nell'unione. l'intersezione di aperti $\bigcap A_i$ è un aperto infatti, partiamo senza perdita di generalità dall'intersezione di due aperti $A \cap B$, preso un punto x dell'intersezione, questo sta sia in A che in B quindi esistono due palle aperte che contengono x e stanno rispettivamente in A e B. Supponiamo che i "raggi" di queste palle siano ϵ_A e ϵ_B e i centri y_A e y_B considero allora $c = \epsilon_A - d(x, y_A)$ e $d = \epsilon_B - d(x, y_B)$ allora la palla $B(x, min(c, d))$ sta nell'intersezione e contiene x dunque è un aperto.

$\square$

1.1.1 osservazione : Con questa proposizione osserviamo che una distanza induce una topologia, infatti la distanza induce il concetto di palla aperta quindi di aperto e la proposizione dice che questi aperti definiscono una topologia dunque ogni spazio metrico è uno spazio topologico. Inoltre notiamo che se nella definizione di topologia avrei posto che l'intersezione infinita di aperti e un aperto non avrei potuto dire che l'insieme degli aperti della definizione 1.1.3 è una topologia in quanto, nel passaggio finale della proposizione precedente uso la funzione minimo, e non è detto che esista per un numero infinito di termini, e questo spiega perché la scelta di porre la chiusura per intersezioni finite e non per intersezioni infinite per una topologia, dunque lo spazio topologico è una effettiva astrazione dello spazio metrico.

Ora mi chiedo, ma se ho due distanze diverse in $\mathbb{R}^n$ queste definiscono la stessa topologia o due diverse topologie?

1.1.5 Definizione : Siano τ_1, τ_2 due topologie. si dice che τ_1 è *più fine di* τ_2 se ogni aperto di τ_2 è aperto di τ_1, analogamente si definisce che τ_1 è *meno fine di* τ_2 se ogni aperto di τ_1 è aperto di τ_2. Due topologie sono *equivalente* se una più fine del'altra e viceversa.

1.1.6 Definizione : Sia $f : X \longrightarrow Y$ dove X, Y sono spazzi topologici. Allora f è *continua* $\iff$ per ogni aperto A di Y vale che $f^{-1}(A)$ è un aperto di X.

1.1.1 esempio :

1) $X, \emptyset$ sono spazi topologici detti *banali* o *indiscreti*. $P(X)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X è una topologia detta *discreta*.

2) Consideriamo $\mathbb{R}^2$, e sia d tale che $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ e $d(x, y) = 0$ se $x = y$. Così definita d è una distanza e questa induce una topologia discreta quindi tutti i punti sono aperti.

Facciamo un riassunto. Sono partito da uno spazio metrico ovvero da una coppia (X, d) dove X è un insieme e d una distanza, abbiamo considerato il concetto di continuità e ci siamo chiesti quali strutture ci bastano per parlare di essa, ovvero è necessario uno spazio metrico per parlare di continuità? a questa domanda abbiamo risposto di no, ed abbiamo introdotto la struttura di spazio topologico che è quella che ha il minimo per poter parlare di continuità. Ora voglio vedere se all'intero di uno spazio topologico possiamo ritrovare alcuni elementi di uno spazio metrico, e se li ritrovo, in che forma li trovo, per esempio : la chiusura, la compattezza, la connessione, etc...

1.1.6 Definizione : Sia $C \subset X$ spazio topologico. C è *chiuso* se è il complementare di un aperto, ovvero $C = X - A$ con A aperto della topologia.

1.1.7 Definizione : In $\mathbb{R}^n$ la distanza di un punto P da una palla aperta A è $d = inf(\{d(P, B)\}_{B \in A})$, B è un punto di A.

1.1.4 Proposizione : In $\mathbb{R}^n$ una palla chiusa è un chiuso.

Dimostrazione : Consideriamo la palla chiusa $\overline{B(a, \epsilon)} = \{x \in X \mid d(a, x) \leq \epsilon\}$, per dimostrare che è un chiuso dovo dimostrare che $X - \overline{B(a, \epsilon)}$ è aperto. Osservo che $X - \overline{B(a, \epsilon)} = \{x \in X \mid d(a, x) > \epsilon\}$, considero ora gli insiemi $A_i = \{x \in X \mid \epsilon < d(x, a) < t_i\}$ dove $t_i < t_{i+1}$. Questi A_i sono aperti infatti $A_i = \bigcup_{b \in X} B(b, \delta)$ dove $\delta = \frac{t_i - \epsilon}{2}$ e $X = \{b \in A_i,\ d(b, B(a, \epsilon)) = \delta\}$ dunque $X - \overline{B(a, \epsilon)} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ è un aperto e perciò $\overline{B(a, \epsilon)}$ è un chiuso. Sostanzialmente posso "ricoprire" ogni A_i (che me lo immagino come un disco bucato al centro) con dei cerchi.

□

1.1.2 osservazione : Gli insiemi di una topologia non sono solo aperti o chiusi, possono essere entrambe le cose infatti il vuoto è un aperto per definizione ma è il complementare di tutto l'insieme quindi è chiuso.

1.1.5 Proposizione : Sia X uno spazio topologico, allora $\emptyset, X$ sono chiusi, se $\mathbb{F}$ è una famiglia infinita di chiusi allora l'intersezione $\bigcap_{C_i \in \mathbb{F}} C_i$ è un chiuso, e se $\mathbb{F}$ è una famiglia finita di chiusi allora l'unione $\bigcup_{C_i \in \mathbb{F}} C_i$ è un chiuso.

Dimostrazione : $X = X - \emptyset$ e $\emptyset = X - X$ quindi $X, \emptyset$ sono chiusi. $\mathbb{F}$ è una famiglia infinita di chiusi quindi per ogni $C_i \in \mathbb{F}$ esiste A_i aperto tale che $C_i = X - A_i$ quindi $\bigcap_{C_i \in \mathbb{F}} C_i = \bigcap_{C_i \in \mathbb{F}} (X - A_i) = X - \bigcup A_i$, siccome $\bigcup A_i$ è un aperto allora $\bigcap_{C_i \in \mathbb{F}} C_i$ è chiuso. $\mathbb{F}$ è una famiglia finita di chiusi quindi per ogni $C_i \in \mathbb{F}$ esiste A_i aperto tale che $C_i = X - A_i$ quindi $\bigcup_{C_i \in \mathbb{F}} C_i = \bigcup_{C_i \in \mathbb{F}} (X - A_i) = X - \bigcap A_i$, siccome $\bigcap A_i$ è aperto allora $\bigcup_{C_i \in \mathbb{F}} C_i$ è chiuso.

□

1.1.3 osservazione : Posso dire che un aperto è il complementare di un chiuso.

1.1.1 Teorema : Data una famiglia $\mathbb{F}$ di sottoinsiemi chiusi di X dove :

1) $\emptyset, X$ sono chiusi.

2) Presa una sottofamiglia infinita di $\mathbb{F}$ allora la loro intersezione $\bigcap F_i$ è un chiuso in X.

3) presa una sottofamiglia finita di $\mathbb{F}$ allora la loro unione $\bigcup F_i$ è un chiuso in X.

Allora esiste una ed una sola topologia di cui $\mathbb{F}$ è l'insieme di tutti e soli i chiusi di quella topologia.

Dimostrazione : Considero l'insieme composta dalle intersezioni arbitrarie di elementi di $\mathbb{F}$, dimostro che è una topologia. $X, \emptyset$ sono chiusi, considero una famiglia infinita $\{A_i\}$ di aperti di X, so che esistono $C_i \in \mathbb{F}$ tale che $A_i = X - C_i$, allora $\bigcup A_i = \bigcup (X - C_i) = X - \bigcap C_i$, ma $\bigcap C_i$ è un chiuso dell'insieme, dunque $\bigcup A_i$ è un aperto. Considero infine una famiglia finita $\{A_i\}$ di aperti di X, so che esistono $C_i \in \mathbb{F}$ tale che $A_i = X - C_i$ allora $\bigcap A_i = \bigcap (X - C_i) = X - \bigcup C_i$, ma $\bigcup C_i$ è un chiuso dell'insieme, dunque $\bigcap A_i$ è un aperto. Quindi l'insieme delle intersezioni arbitrarie di elementi di $\mathbb{F}$ è una topologia, devo ora vedere che se prendo un chiuso di questa topologia allora questo sta in $\mathbb{F}$. Sia C un chiuso della topologia, so che è intersezione arbitraria di elementi di $\mathbb{F}$, quindi $C = \bigcap C_i = \bigcap (X - A_i) = X - \bigcup A_i$, con A_i aperti di X quindi C è un chiuso di X e per ipotesi di $\mathbb{F}$ si ha $C \in \mathbb{F}$.

□

1.1.8 Definizione : Una *base* di una topologia è una sottofamiglia di aperti in cui ogni aperto della topologia è unione di aperti della base.

Osserviamo che per quanto detto prima le palle aperte sono una base della topologia euclidea. Ora mi chiedo se scelta una qualunque famiglia di sottoinsiemi esiste una topologia di cui quella e la base.

1.1.2 Teorema : Sia $\mathscr{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X, se :

1) $X = \bigcup\limits_{B_i \in \mathscr{B}} B_i$.

2) per ogni $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ e per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ esiste $C \in \mathscr{B}$ tale che $x \in C \subset B_1 \cap B_2$ (sto dicendo che l'intersezione di due chiusi è unione di chiusi, non che è un chiuso, difatti non

ho ancora una topologia sono sempre all'interno di una famiglia di insiemi).

Allora esiste ed unica una topologia di cui $\mathscr{B}$ è una base, e dico che questa topologia τ è composta dalle possibili unioni arbitrarie degli elementi di $\mathscr{B}$.

Dimostrazione : Devo verificare che la topologia τ formata da unioni arbitrarie di elementi di $\mathscr{B}$ con le ipotesi date è una topologia. Intanto ovviamente $\emptyset, X$ sono aperti per l'ipotesi 1, poi presa una famiglia infinita di $A_i \in \tau$, so che sono unione dei $B_{ij} \in \mathscr{B}$ allora $\bigcup\limits_i (A_i) = \bigcup\limits_i (\underset{j}{\cup} B_{ij}) = \bigcup\limits_{ij} B_{ij}$ che a sua volta è unione dei $B_{ij} \in \mathscr{B}$ quindi sta in τ. Infine consideriamo una famiglia finita di $A_i \in \tau$, partiamo dall'intersezione di soli due insiemi. Abbiamo $A_1 \cap A_2 = (\cup B_i) \cap (\cup B_j) = \bigcup (B_i \cap B_j)$ che per l'ipotesi 2 si ha $B_i \cap B_j = \cup B_s$ quindi $A_1 \cap A_2 = \bigcup B_s$ quindi sta in τ, e per induzione di ha la tesi.

$\square$

Dopo questo primo incontro con la topologia, facciamo un passo indietro e ritorniamo in uno spazio metrico.

1.1.4 osservazione : Due metriche si dicono equivalenti se inducono la stessa topologia.

1.1.5 osservazione : Sia X una topologia e d_1, d_2 due distanze. Se $d_1 \leq d_2$ allora $B_2 = B_{d_2}(a, \epsilon) \subseteq B_{d_1}(a, \epsilon) = B_1$ infatti se $z \in B_2$ allora $d_2(z, a) < \epsilon$ ma $d_1 \leq d_2$ quindi $d_1(a, z) < \epsilon$.

1.1.1 esercizio : Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ le distanze

1) $d_E(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$ detta **distanza euclidea**.

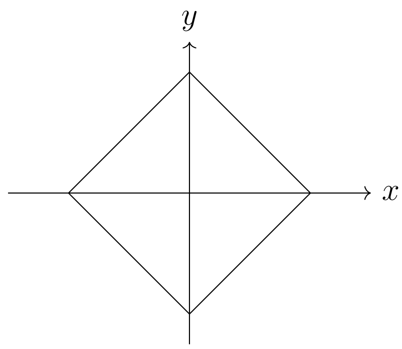
2) $d_\infty(P, Q) = sup(|x_p - x_q|, |y_p - y_q|)$.

3) $d_1(P, Q) = |x_p - x_q| + |y_p - y_q|$.

Queste distanze sono equivalenti e quindi iducono la stessa topologia detta **Topologia euclidea**. D'ora in poi, a meno di non specificarlo, considererò $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea.

soluzione : Voglio dire che vale $d_\infty \leq d_E \leq d_1 \leq md_\infty$, una volta dimostrato questo, usando l'osservazione precedente ottengo che le palle di una topologia stanno in quell'altra e viceversa. L'unica diseguaglianza non ovvia è $d_E \leq d_1$. Ora $|x_p - x_q| + |y_p - y_q| > 0$ allora $d_E \leq d_1 \iff (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 < (|x_p - x_q| + |y_p - y_q|)^2 = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + 2|x_p - x_q||y_p - y_q| \iff 2|x_p - x_q||y_p - y_q| > 0$ che è vera.

Osserviamo che la palla aperta di raggio 1 e centro nell'origine di d_1 dell'esercizio precedente è :



(Figura 2)

Prendiamo una distanza d e consideriamo la sua *limitazione standard* $\delta = \inf(1, d)$, si dimostra che è una distanza inoltre è equivalente a d infatti $\delta \leq d$ e ogni palla generata dalla distanza d la posso vedere come unione delle palle generate da σ. Questo esempio ci mostra che una topologia è una struttura **locale** non globale infatti δ é banale per i punti maggiori di 1 eppure è equivalente ad una distanza che agisce globalmente su tutto X quindi con questo esempio sto dicendo che se la topologia sta in X o sono in una palla di raggio 1 è uguale, topologicamente parlando.

1.1.9 Definizione : Sia X uno spazio topologico e A un suo aperto, la *chiusura* di A è l'intersezione di tutti i chiusi C di X che contengono A, ovvero $\bar{A} = \bigcap\limits_{C \supset A} C$. La *parte interna* di A è l'unione di tutti gli aperti B di X contenuti in A, ovvero $A^{\circ} = \bigcup\limits_{B \subset A} B$.

1.1.10 Definizione : Sia X uno spazio topologico. Si dice che A è *denso in* X se e solo se $X = \bar{A}$, la chiusura di A è tutto X.

Facciamo qualche esempio di topologia. Definisco la *topologia cofinita* dove un insieme A è aperto se e solo se $X - A$ è finito oppure A è uguale a tutto X o a $\emptyset$. Si verifica che è una topologia infatti per ipotesi X e $\emptyset$ sono aperti, inoltre se prendiamo una unione arbitraria di aperti $\bigcup A_i$ allora $X - \bigcup A_i = \bigcap(X - A_i)$ ma gli $X - A_i$ sono finiti quindi l'intersezione arbitraria di insiemi finiti e finita, infine se prendiamo una intersezione finita di aperti $\bigcap A_i$ allora $X - \bigcap A_i = \bigcup(X - A_i)$ ma l'unione finita di insiemi finiti e finita quindi abbiamo dimostrato che è una topologia. È confrontabile con quella euclidea? ovvero una è più fine dell'altra? La topologia cofinita e meno fine di quella euclidea infatti se prendiamo $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$ questo è un chiuso nella topologia euclidea ma non di quella cofinita dove i chiusi sono tutti e soli i sottoinsiemi finiti. Invece un chiuso della topologia cofinita è un chiuso di quella euclidea infatti un insieme discreto di punti è unione di singoli punti che sono chiusi nella euclidea in quanto complementari di $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ che è aperto nella euclidea e siccome i chiusi determinano univocamente la topologia si ha che ogni aperto della topologia cofinita sta in quella euclidea.

1.1.6 osservazione : La distanza fra due insiemi A e B è data dalla formula $inf\{d(P,Q)\}_{P \in A,\ Q \in B}$.

1.1.2 esempio : Troviamo un insieme chiuso C di $\mathbb{R}$ disgiunto da $\mathbb{Z}$ e tale $d(C, \mathbb{Z}) = 0$. Se consideriamo l'insieme $\{\frac{n+1}{n}\}_{n>2}$ questo è ovviamente disgiunto da $\mathbb{Z}$ e notiamo inoltre che $d(1, \frac{n+1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ che tenda a 0 quindi i due insieme hanno distanza 0, infine $\{\frac{n+1}{n}\}$ è unione di punti quindi è un chiuso.

Prima di andare avanti abbiamo bisogno di definire e dimostrare le proprietà di $\mathbb{R}$ che ci saranno utili per i passi successivi.

Costruzione dei reali via sezione di Dedekind:

Proponiamo la costruzione di $\mathbb{R}$ via sezione di Dedekind, ci sarà utile per i prossimi teoremi a vere fresca questa dimostrazione. Introduciamo innanzi tutto i reali come $x = n + 0, d_1 d_2 \cdots$ dove n è un intero e i d_i sono naturali da 1 a 9. I reali come i razionali hanno più modi di essere espressi per esempio $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, ugualmente per i reali $1 = 0, \bar{9}$. Per sistemare questa dualità di scrittura diciamo che non esiste i tale che definitivamente per ogni $n > i$ si abbia $d_n = 9$, inoltre i reali li possiamo esprimere in funzione dei decimali ovvero un numero reale è quel numero che soddisfa la doppia disequazione $n + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_k}{10^k} \leq x < n + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_k+1}{10^k}$ per ogni k e per ogni d_k, ora proseguiamo con la costruzione dei reali (osserviamo che queste considerazione le abbiamo fatte a posteriori, ovvero conoscendo già la forma dei numeri reali, inoltre l'ultima considerazione riguardo l'espansione decimale la possiamo fare una volta che siamo in grado di poter costruire una tale espansione e ci sarà utile la funzione parte intera ma di tutto questo ne parlerò in seguito).
Si chiama *sezione di Dedekind* la coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{Q}$ dove $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$ e per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si ha $a < b$, con questa definizione (A, B) è ambiguo infatti può essere visto come A che è l'insieme degli elementi strettamente minori di un certo r e B l'insieme degli elementi maggiori uguali a r oppure A come l'insieme degli elementi minori uguali di r e B l'insieme degli elementi maggiori strettamente di r. Ci riferiamo solo alla prima dicitura, formalmente diciamo che oltre alla definizione sopra data si ha che A è non vuoto e diverso di $\mathbb{Q}$, se per ogni $a \in A$ si ha che se $a' < a$ allora $a' \in A$ ed infine A non ha massimo ovvero non esiste $m \in A$ tale che $m > a$ per ogni $a \in A$, dunque B è univocamente determinato da $\mathbb{Q} - A$ quindi posso identificare la coppia (A, B) con A. A questo punto dico che $\mathbb{R}$ è l'insieme delle sezioni di Dedekind, cioè esiste un unico *elemento separatore* dei due

insiemi della sezione e quel elemento è un reale e lo identifico con la sezione che è anche il $sup(A)$, per esempio $\sqrt{2}$ è identificato da $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0 \text{ oppure } a^2 < 2\}$. Con questa definizione osserviamo che $\mathbb{R}$ ha una copia isomorfa di $\mathbb{Q}$ data dalle sezioni $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < q \in \mathbb{Q}\}$.

1.1.3 Teorema : Due corpi ordinati completi E e F sono isomorfi.

Dimostrazione : (idea della dimostrazione) Intanto osserviamo che in un corpo ordinato completo ogni quadrato e non negativo, il corpo ha caratteristica 0 ed ha una copia isomorfa di $\mathbb{Q}$, inoltre è archimedeo ovvero per ogni a, b nel corpo tale che $0 < a < b$ esiste n tale che $b < na$. Ora definiamo $\mathbb{Q}_a = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < a\}$, osserviamo che $\mathbb{Q}_a$ è una sezione di Dedekind, dunque è non vuoto e superiormente limitato, con ciò definiamo $h : E \longrightarrow F$ tale che $h(a) = sup(\mathbb{Q}_a)$. Questo è un isomorfismo infatti coincido le relazioni d'ordine dei due corpi, è l'identità su $\mathbb{Q}$ e si verificano tutte le altre proprietà dell'isomorfismo.

□

1.1.6 Proposizione : $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione : Per dimostrare ciò mostro che presi due reali esiste sempre un razionale che ci sta in mezzo. Intanto osserviamo che $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo perciò valgono le proprietà descritte dal teorema 1.1.3, ora prendiamo due reali $r, t \in \mathbb{R}$, sappiamo che $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo quindi se consideriamo l'insieme $A_r = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq r\}$, che definisce una sezione di Dedekind, con $r \in \mathbb{R}$, questo ha sup ed il sup è la parte intera di r quindi posso definire la funzione parte intera come $[x] = sup(A_x)$, devo solo verificare che $\mathbb{N}$ è infinito così è una buona definizione in quanto non dipende dal numero reale che si considera, e in effetti se fosse limitato fino ad n avrebbe un elemento separatore c tale che $c > n$ ma $n + 1 > c$ e $n+1 \in \mathbb{N}$ assurdo, quindi è illimitato. Adesso con la funzione parte intera posso esprimere ogni numero reale come espansione decimale infatti $r = [r] + [(r - [r])10] + \cdots$ quindi considerando i due reali r, t tale che $r < t$ posso considerale la loro espansione decimale $r = n + 0, d_1 d_2 \cdots$ e $t = m + 0, s_1 s_2 \cdots$, consideriamo ora il più grande v tale che $d_i = s_i$ per ogni $i \leq v$, si ha allora che $s_{v+1} = d_{v+1} + a$ con $0 < a < 9$. Allora tronco l'espansione di t a s_{v+1} e considero il razionale $\tilde{t} = n + 0, s_1 s_2 \cdots s_v s_{v+1} \in \mathbb{Q}$ allora $r < \tilde{t} < t$.

□

1.1.1 Corollario : I numeri decimali sono densi in $\mathbb{R}$

Dimostrazione : Con le stesse considerazioni del teorema precedente consideriamo i reali r, t e le loro espansioni decimali e cerchiamo di trovare un decimale che ci sta in mezzo.

□

Abbiamo osservato che $1 = 0, \bar{9}$, questa ambiguità in $\mathbb{R}$ è dovuta al fatto che non esisto gli infinitesimi in $\mathbb{R}$, in $0,\bar{9}$ differisce da 1 per un infinitesimo ma questo non è definito anzi è nullo quindi sono uguali. Questa mancanza può portare a dei problemi, per esempio consideriamo l'angolo che c'è tra una curva ed una sua tangente, diremo che è 0 ma se l'angolo è la parte di piano compresa fra le due curve questa non non è nulla, il problema è che l'angolo è infinitesimo. In insiemi di funzioni la questione è ben diversa, troviamo funzioni che hanno infinitesimi maggiori di 0 e minori di $\frac{1}{n}$ per ogni n, che è assurdo pensare in $\mathbb{R}$.

1.1.2 Corollario : L'insieme dei reali non è numerabile.

Dimostrazione : Se fosse numerabile allora esisterebbe una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{N}$, si dimostra che $\mathbb{R}$ corrisponde biunivocamente al segmento $(0,1)$ quindi posso anche considerare un corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $(0,1)$. Se per assurdo esistesse una applicazione suddetta allora potrei mette tutti i numeri nel segmento $(0,1)$, in espansione decimale, in una lista ordinata della forma :

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \\ r_2 &= 0, b_1 b_2 b_3 \cdots \\ r_3 &= 0, c_1 c_2 c_3 \cdots \\ &\cdots \end{aligned}$$

costruendo così una matrice infinita di tutti i numeri del segmento, se prendiamo però il reale della forma $0,\alpha_1\alpha_2\cdots$ con α_1 diverso da a_1 e da 9, α_2 diverso da b_2 e da 9 ect..., ovvero prendo la diagonale e la considero come espansione decimale e costruisco un reale che ha ogni elemento della espansione diverso da questo. Questo numero, ottenuto dal procedimento detto diagonale di Cantor, non sta nell'elenco perchè se ci fosse sarebbe nella posizione r_n ma questo ha l'n-esimo decimale che sta sulla diagonale e per costruzione è diverso da quello della diagonale che è assurdo, dato che la configurazione è unica, perciò $\mathbb{R}$ non è numerabile.

□

1.1.3 esempio : Trovo una bigezione tra il segmento $(0,1)$ e il quadrato $(0,1)\times(0,1)$. È ovvio che $\#(0,1) \leq \#(0,1)\times(0,1)$, inoltre considero la coppia $(x,y) \in (0,1)\times(0,1)$, in espansione decimale si ha che $x = 0, a_1 a_2 \cdots$ e $y = 0, b_1 b_2 \cdots$, allora posso costruire un'applicazione iniettiva tra $(0,1)\times(0,1)$ e $(0,1)$ tale che ad ogni coppia (x,y) come prima associo il numero $0, a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots$ e si ha che $(0,1)\times(0,1)$ è in corrispondenza biunivoca con $(0,1)$.

□

È possibile trovare anche una applicazione continua tra $(0,1)\times(0,1)$ e $(0,1)$ che è data dalla curva di Peano, ci sono tante curve di Peano ma ognuna è data da una successione di curve frattali che al limite ricoprono tutto il quadrato (da vedere un esempio). Ritorniamo adesso agli argomenti di topologia.

1.1.1 Lemma : D è denso in $X \iff$ per ogni A aperto di X ho che $A \cap X \neq \emptyset$.

Dimostrazione : ($\Longleftarrow$) Supponiamo che per ogni aperto A di X si ha $A \cap D \neq \emptyset$ e supponiamo per assurdo che $\bar{D} \neq X$ allora si ha che, essendo $\bar{D}$ chiuso, $X - \bar{D}$ aperto e $(X - \bar{D}) \cap D = \emptyset$ assurdo quindi $X = \bar{D}$.
($\Longrightarrow$) Supponiamo adesso che $\bar{D} = X$ e di avere una aperto non vuoto A tale che $A \cap D = \emptyset$ allora $D \subset X - A$, siccome $X - A$ è chiuso allora $\bar{D} \subset X - A \neq X$ assurdo, quindi vale la tesi. $\square$

1.1.7 osservazione : Nella dimostrazione della densità di $\mathbb{Q}$ si usa implicitamente questo fatto, ovvero abbiamo dimostrato che per ogni intervallo di $\mathbb{R}$, quindi aperto, trovavamo un razionale contenuto dentro.

1.1.4 esempio : Consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita, $\mathbb{N}$ è un insieme infinito quindi è un aperto e la sua chiusura (siccome i chiusi sono solo gli insiemi finiti o tutto $\mathbb{R}$) è tutto $\mathbb{R}$ quindi è un insieme denso.

1.1.11 Definizione : Sia $F \subset X$, si dice $frontiera$ il chiuso $\bar{F} - F^{\circ}$.

1.1.12 Definizione : Sia $x \in \bar{F}$ allora si dice che x è *aderente a* F.

1.1.13 Definizione : Sia $x \in X$, si dice *intorno di* x un insieme I tale che esiste un aperto U dove $x \in U \subset I$.

1.1.8 osservazione : Un insieme aperto è intorno di ogni suo punto.

1.1.9 osservazione : Se U è un intorno di un punto e $U \subset V$ allora V è intorno dello stesso punto.

1.1.10 osservazione : Se U, V sono intorni di un punto allora anche $U \cap V$ e $U \cup V$ sono intorni dello stesso punto.

1.1.7 Proposizione : Per ogni $x \in X$ definisco la famiglia $\mathscr{I}(x)$ di intorni di x. Ora dico che un aperto in $\mathscr{I}(x)$ è un insieme che è intorno di ogni suo punto allora questi definiscono gli aperti di una topologia.

Dimostrazione : Ovviamente $\emptyset$ e X sono aperti, consideriamo l'unione arbitraria di aperti $\bigcup A_i$, se prendiamo un punto x dell'unione questo apparterrà ad un aperto A_i per un certo i, ma A_i è intorno di x quindi esiste un aperto U tale che $x \in U \subset A_i \subset \bigcup A_i$ quindi $\bigcup A_i$ è aperto. Ora consideriamo l'intersezione di due aperti $A \cap B$, per ogni punto x dell'intersezione si ha che $x \in A$ e $x \in B$ quindi esistono due aperti U, V tale che $x \in U \subset A$ e $x \in V \subset B$ in particolare $x \in U \cap V \subset A \cap B$.

$\square$

1.1.2 esercizio : Sia X uno spazio topologico e sia $\gamma : P(X) \longrightarrow P(X)$ tale che $\gamma(A) = C(A)$ dove $C(A) \supset A$, inoltre γ è idempotente ovvero $C(C(A)) = C(A)$, poi $C(\emptyset) = \emptyset$ e per ogni $A, B \subset X$ si ha $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$, in particolare $C(A)$ è un chiuso e γ si chiama *operatore di chiusura*. Definisco allora che un chiuso è un insieme A tale che $C(A) = A$ allora questi chiusi definiscono una topologia.

soluzione : Osserviamo che per ipotesi $C(\emptyset) = \emptyset$ e ovviamente $C(X) = X$. Consideriamo una unione finita di chiusi $\bigcup A_i$ allora $C(\bigcup A_i) = \bigcup C(A_i) = \bigcup A_i$ dunque è un chiuso (dove il primo uguale deriva dall'ipotesi $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$ più una induzione sul numero delle unioni), infine consideriamo l'intersezione arbitraria di chiusi $\bigcap A_i$ allora $C(\bigcap A_i) = C(\bigcap(X - B_i)) = C(X - \bigcup B_i) = X - \bigcup B_i = \bigcap(X - B_i) = \bigcap A_i$, dove B_i sono aperti e il terzo uguale perché $X - \bigcup B_i$ è chiuso.

Con questi esempi ho mostrato che ci sono tanti modi per definire una topologia: con gli aperti, con i chiusi, con gli intorni, con l'operatore di chiusura e con una distanza, anche se non è sempre detto che uno spazio topologico sia indotto da una distanza, inoltre questi elencati non sono gli unici modi per definire una topologia. Adesso voglio definire, a partire da uno spazio topologia, altri spazi topologici.

1.1.14 Definizione : Sia X uno spazio topologico, sia $Y \subset X$ un suo sottoinsieme, allora Y ha struttura di *sottospazio* se $A \subset Y$ è aperto $\Longleftrightarrow$ esiste un aperto U di X tale che $A = Y \cap U$.

Attenzione a non confondere le idee, questo non vuol dire che ogni sottoinsieme è sottospazio ma lo è se verificata quella ipotesi. Per esempio $\mathbb{R}^+$ è uno spazio vettoriale ma non dobbiamo pensarlo come sottospazio di $\mathbb{R}$ perché la sua struttura è diversa da quella di $\mathbb{R}$, le operazioni non sono le stesse. Analogamente per essere sottospazio topologico deve valere che ogni aperto di Y è intersezione di Y con un aperto dello spazio X.

1.1.5 esempio : Sia $[0, 1]$ con la topologia discreta, questo è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (con $\mathbb{R}$ inteso con la topologia euclidea), ma non è un suo sottospazio in quanto 0.5 è un aperto in $[0, 1]$ con la topologia discreta ma non esiste aperto A di $\mathbb{R}$ tale che $A \cap [0, 1] = 0.5$. Anzi $[0, 1]$, con la topologia euclidea, è sottospazio di $\mathbb{R}$.

1.1.8 Proposizione : Se $Y \subset X$ è sottospazio allora l'applicazione immersione $i : Y \longrightarrow X$ è continua.

Dimostrazione : Basta osservare che preso un aperto U di X si ha che $i^{-1}(U) = Y \cap U$ che è aperto in quanto Y è sottospazio.

$\square$

1.1.6 esempio : Consideriamo sempre $[0, 1]$ con la topologia discreta, abbiamo che $i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua ma come detto prima $[0, 1]$ non è sottospazio con la topologia discreta.

1.1.15 Definizione : $Y \subset X$ è sottospazio se e solo se Y ha la topologia meno fine per cui l'applicazione immersione è continua.

Con questa definizione escludiamo che accada il caso dell'esempio precedente e diciamo che la topologia di sottospazio è una sola ed è caratterizzata da questa definizione.

1.1.16 Definizione : Un *sistema fondamentale di intorni* è una famiglia di intorni di un punto tali che ogni intorno di questo punto contiene uno di quelli di questa famiglia.

1.1.11 osservazione : Gli insiemi di una base di una topologia che contengono un punto formano una sistema fondamentale di intorni per quel punto.

1.1.3 esercizio : $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$

soluzione : $[\subseteq]$ $A \subset A \cup B$ e $B \subset A \cup B \Longrightarrow A \subset \overline{A \cup B}$ e $B \subset \overline{A \cup B} \Longrightarrow \bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ e $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ allora $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. $[\supseteq]$ $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B} \Longrightarrow \overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.

$\square$

Per $A \cap B$ non è così semplice infatti se consideriamo in $\mathbb{R}$ due palle aperte e tangenti, loro hanno intersezione vuota quindi la chiusura dell'intersezione è vuota ma l'intersezione delle due chiusure è il punto di intersezione che quindi non è vuota.

1.1.9 Proposizione : Sia F un insieme e $\bar{F}$ l'insieme dei punti aderenti (o la sua chiusura), allora per ogni $x \in \bar{F}$ e per ogni $I \in \mathscr{I}(x)$ si ha che $I \cap F \neq \emptyset$.

Dimostrazione : Se $x \notin \bar{F}$ allora esiste un aperto A tale che $x \in A$ e $A \cap \bar{F} = \emptyset$ dunque se x.

$\square$

1.1.12 osservazione : L'insieme dei punti a distanza 0 da un insieme è la sua chiusura.

1.1.4 esercizio : La funzione distanza da un insieme è una funzione continua.

soluzione : Sia $d_Z(x) = inf\{d(x, z)\}_{z \in Z}$ la funzione distanza da un insieme, bisogna dimostrare che $|d_Z(x) - d_Z(y)| < \epsilon$ ogni qualvolta $d(x, y) < \delta$. Per la definizione di inf si ha che per ogni $\epsilon_1 > 0$ esiste $z \in Z$ tale che $d_Z(x)+\epsilon_1 > d(x, z)$ quindi $d_Z(y) < d(z, y) \leq d(z, x)+d(x, y) < d_Z(x) + \epsilon_1 + d(x, y)$ quindi si ha che $|d_Z(y) - d_Z(x)| < |\epsilon_1 + d(x, y)| < |\epsilon_1 + \delta| = \epsilon$ e si ha la tesi.

Quindi dopo aver definito cosa è una topologia ci siamo chiesti se alcune proprietà dello spazio da cui eravamo partiti, ovvero $\mathbb{R}$ o uno spazio metrico in generale, si mantenevano anche in uno spazio topologico. Abbiamo innanzi tutto definito e studiato l'insieme $\mathbb{R}$ ed abbiamo visto che la chiusura si può definire anche in uno spazio topologico, e anzi, che con questo concetto si può definire una topologia. Seguendo questa linea abbiamo mostrato altri modi per poter definire una topologia in legame ad $\mathbb{R}$ come con gli intorni, abbiamo inoltre visto il concetto di frontiera e aderenza e abbiamo infine cercato di definire il concetto di sottospazio e in che relazione sta con la continuità. Ricordiamo che il motivo che ci ha portato a definire il concetto topologia è di definire il concetto più astratto di continuità quindi tutto quello che si andrà ad approfondire sarà in relazione ad essa, a questo proposito vogliamo studiare funzioni che legano spazi topologici e in che modo ci aiuta la continuità nel formare questi legami in modo da poter classificare i vari spazi topologici.

1.2 Omeomorfismi

1.2.1 Definizione : Un $omeomorfismo$ tra due spazi topologici X, Y è una applicazione biunivoca continua con inversa continua.

Gli omeomorfismi sono applicazioni che permettono di muoversi liberamente tra gli spazi topologici, quindi è interessante studiarne alcuni invarianti e proprietà fondamentali, arrivando poi ad una classificazione come anticipato prima.

1.2.1 osservazione : Se f omeomorfismo e g è la sua inversa allora $g^{-1}(A) = f(A)$.

1.2.2 Definizione : Un applicazione che manda aperti in aperti è detta *aperta*. Una applicazione che manda chiusi in chiusi è detta *chiusa*.

1.2.1 Proposizione : f è omeomorfismo $\iff$ f è biunivoca, chiusa e continua $\iff$ f è biunivoca, aperta e continua.

Dimostrazione : Sia $f : A \longrightarrow B$ è omeomorfismo allora è biunivoca e l'inversa è continua quindi per ogni chiuso $A - C$ con C aperto si ha che per continuità di g vale che $g^{-1}(A - C) = f(A - C) = B - f(C)$ è chiuso quindi f è chiusa. Se f è biunivoca e chiusa allora per ogni aperto $D = X - C$ con C aperto si ah che $f(D) = f(X - C) = B - f(C)$ è chiuso quindi $f(C)$ aperto dunque f aperta. Se f è biunivoca e aperta allora per ogni aperto C di A si ha che $g^{-1}(C) = f(C)$ è aperto quindi l'inversa g è continua dunque si ha la tesi.

□

1.2.2 osservazione : L'insieme degli omeomorfismi è un gruppo.

1.2.1 Teorema : Le uniche strutture moltiplicative di $\mathbb{R}^n$ sono definite solo per $n = 1, 2, 4, 8$.

1.2.1 esempio : In $\mathbb{R}^2$ si ha $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ab + bc)$ simile al prodotto in $\mathbb{C}$. Osserviamo che $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ e $\mathbb{R}^8 \cong \mathbb{Q}^2$ (dove $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei quaternioni) e si fa una analogia a prima si fa il prodotto anche in questi insieme.

Abbiamo precedentemente definito una struttura topologica sul prodotto di spazi topologici, quindi siamo riusciti a costruire un nuovo spazio topologico a partire da due dati. Quello che andremo a fare nel capitolo che segue e di costruire una topologia sul quoziente di uno spazio tropologico (tramite una relazione di equivalenza).

1.3 Quozienti topologici

Sia X uno spazio topologico e $\sim$ una relazione di equivalenza, consideriamo allora l'insieme $X/\sim$, mi chiedo se è possibile metterci una struttura di spazio topologico. Prendiamo la proiezione al quoziente $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ allora dico che :

1.3.1 Definizione : $A \in X/\sim$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(A)$ è aperto in X e con questa scelta dico che la struttura di topologia su $X/\sim$ e la più fine per cui π è continua.

Voglio vedere che con questa scelta di aperti ho effettivamente una topologia.

Ovviamente $\pi^{-1}(X/\sim) = X$ e $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ sono dunque aperti, siano A_i aperti di $X/\sim$ allora esistono degli aperti B_i di X tale che $\pi(B_i) = A_i$ e vale che $\bigcup A_i = \bigcup \pi(B_i) = \pi(\bigcup B_i)$ infatti se $x \in \bigcup \pi(B_i) \Longrightarrow \pi^{-1}(x) \in B_i \subset \bigcup B_i \Longrightarrow x \in \pi(\bigcup B_i)$ dunque $\bigcup \pi(B_i) \subset \pi(\bigcup B_i)$, viceversa se $x \in \pi(\bigcup B_i) \Longrightarrow \pi^{-1}(x) \in \bigcup B_i$ in particolare $\pi^{-1}(x) \in B_i$ per un certo i quindi $x \in \bigcup \pi(B_i)$ dunque $\pi(\bigcup B_i) \subset \bigcup \pi(B_i)$, in conclusione $\pi^{-1}(\bigcup A_i) = \pi^{-1}(\bigcup \pi(B_i)) = \pi^{-1}(\pi(\bigcup B_i) = \bigcup B_i$ che è aperto. Infine siano A, B aperti di $X/\sim$ allora esistono C, D aperti di X tale che $\pi(C) = A$ e $\pi(D) = B$, analogamente a prima si dimostra che $\pi(C) \cap \pi(D) = \pi(C \cap D)$ e si ha che effettivamente $X/\sim$ è uno spazio topologico.

1.3.2 Definizione : A si dice *saturo* se e solo se $a \in A$ allora $b \in A$ per ogni $b \sim a$ per una certa relazione di equivalenza $\sim$, si dice inoltre che A, con quella proprietà, è il *saturato* di a.

1.3.1 esempio : In $\mathbb{R}$ diciamo che $a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Z}$ allora il saturato di 1 è $\mathbb{Z}$, il saturato di π è $\pi + \mathbb{Z}$.

1.3.1 osservazione : Nella topologia quoziente sia Ω un aperto di $X/\sim$ allora $\pi^{-1}(\Omega)$ è una aperto saturo di X. Vale sempre che la controimmagine di un aperto è un saturo.

1.3.2 osservazione : L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f((x, y)) = xy$ non è chiusa infatti considero l'iperbole $C = \{(x, y) \mid xy = 1\}$, questo è un chiuso perchè $C = f^{-1}(1)$ ovvero è la controimmagine di un chiuso ed essendo f continua allora è chiusa, ma $f(C) = \mathbb{R}/\{0\}$ che aperto dato che è il complementare di $\{0\}$ che è un chiuso.

Considero l'applicazione continua $f : X \longrightarrow Y$ dove X, Y spazi topologici, sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X allora considero il diagramma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\
& X/\sim \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

voglio vedere quando g è un omeomorfismo, considero innanzi tutto che f è anche surgettiva, di conseguenza abbiamo che g è biunivoca. Adesso prendo un aperto A di Y, so che $f^{-1}(A)$ è un aperto saturo di X quindi $\pi(f^{-1}(A)) = g^{-1}(A)$ è aperto quindi g è continua (sto usando implicitamente che π è una applicazione aperta, ma lo vedremo più avanti), con queste ipotesi abbiamo scoperto che g è biunivoca e continua. mi resta da vedere quando g^{-1} è continua e non ho ancora usato Y in tutto questo, dico che Y è omeomorfo a $X/\sim$ se Y ha la struttura di spazio quoziente quindi :

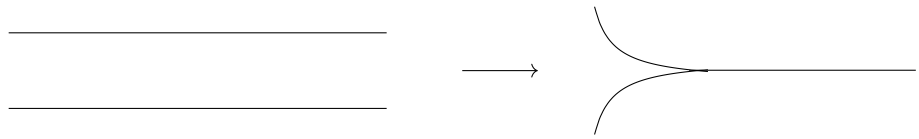
1.3.1 Teorema : (di omeomorfismo) Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua e surgettiva allora Y è omeomorfo a $X/\sim$ se e solo se A è un aperto di $Y \iff f^{-1}(A)$ è aperto di X.

Dimostrazione : Devo solo mostrare che g^{-1} è continua. Sia A aperto di $X/\sim$ allora $\pi^{-1}(A)$ è aperto di X perché π è continua (definizione 1.3.1) dunque $f(\pi^{-1}(A)) = g(A)$ è aperto di Y (per ipotesi su Y).

$\square$

1.3.3 osservazione : Nell'ipotesi del teorema uso A aperto $\iff f^{-1}(A)$ aperto ma $(\Longrightarrow)$ è ovvia dalla continuità di f quindi la questione importante è $f^{-1}(A)$ aperto allora A aperto, ovvero se ho un insieme B di X e l'immagine è aperta allora anche B è aperto.

1.3.2 esempio : Prendo due rette parallele in $\mathbb{R}^2$ parametrizzate da $(x,1)$ e $(y,0)$, dico che $(x,1) \sim (y,0) \iff x,y > 0$ e $x = y$. Osserviamo che $(0,1) \not\sim (0,0)$ quindi quozientando abbiamo



(Figura 3)

da 0 in poi le rette coincidono, inoltre gli intorni di $(0,0)$ e $(0,1)$ nel quoziente hanno sempre intersezione non vuota infatti nel quoziente la parte di intorno maggiore di 0 di uno e dell'altro va a coincidere.

1.3.4 osservazione : Nella topologia cofinita gli intorni si intersecano tutti fra di loro infatti supponiamo che due intorni abbiamo intersezione vuota, allora esistono due aperti A, B rispettivamente contenuti negli intorni, ma $X - A$ è chiuso quindi finito e contiene B che è infinito e ciò è assurdo, dunque A e B si intersecano e perciò anche gli intorni.

1.3.3 Definizione : Sia X uno spazio topologico, si dice che è di $Hausdorff$ o T_2 se e solo se per ogni coppia di punti x, y esistono due intorni $U \subset I(x)$ e $V \subset I(y)$ tale che $U \cap V = \emptyset$.

1.3.5 osservazione : L'esempio precedente e l'osservazione precedente mostrano due esempi di spazi non T_2.

1.3.6 osservazione : Un sottospazio di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff, ma come abbiamo visto nell'esempio il quoziente di uno spazio di Hausdorff non è di Hausdorff, il quoziente fa perdere molte proprietà dello spazio di partenza.

Quello che abbiamo visto introducendo gli omeomorfismo e la possibilità di muoverci attraverso gli spazi topologici, abbiamo introdotto lo spazio quoziente e le sue proprietà che legano le applicazioni continue con gli spazi topologici. L'introduzione della nozione di essere $Hausdorff$ è il primo posso nella ricerca di invarianti per omeomorfismo, caratterizzare gli spazi topologici tramite questi invarianti ci darà la possibilità di classificarli a meno di omeomorfismo, in tutta analogia con la similitudine o l'SD-equivalenza incontrata nei corsi di Geometria 1.

1.3.1 esercizio : Se X è T_2 allora ogni punto è chiuso.

soluzione : Sia $x \in X$, dimostrare che x è chiuso è equivalente a dimostrare che $X - \{x\}$

è aperto. Ora per ogni $y \in X - \{x\}$ esistono $x \in U_y$ e $y \in V_y$ tale che $U_y \cap V_y = \emptyset$, considero quindi $A = \bigcup V_y$ e osservo che $A = X - \{x\}$ infatti per ogni $y \in X - \{x\}$ so ha che $y \in V_y \subset A \Longrightarrow y \in A$, viceversa se $y \in A$ allora $y \in V_y \subset X - \{x\}$ infatti $x \notin V_y$ dunque $y \in X - \{x\}$. In conclusione $X - \{x\} = \bigcup V_y$ e V_y sono aperti dunque $X - \{x\}$ è aperto perciò x è chiuso.

1.3.2 esercizio : (da vedere) Consideriamo una infinità numerabile di semirette, ci facciamo qualcosa e questo non si immerge in $\mathbb{R}$.

soluzione :

La definizione di essere T_2 è alla base di una collezione di assiomi che servono per distinguere i vari spazi topologici dalle proprietà che hanno, questi assiomi prendono il nome di *assiomi di separazione* tra i quali ci stanno le definizioni di $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{\frac{3}{2}}, T_4$ che definiremo man mano del corso.

1.3.4 Definizione : Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua. f è detta *immersione topologica* se e solo se f è iniettiva e $A \subset X$ è aperto se e solo se esiste un aperto $B \subset Y$ tale che $A = f^{-1}(B)$.

1.3.5 Definizione : Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua. f è detta *identificazione* se e solo se f è surgettiva e $B \subset Y$ è aperto se e solo se $f^{-1}(B) \subset X$ è aperto.

1.3.7 osservazione : Le implicazioni : «esiste un aperto $B \subset Y$ tale che $X \supset A = f^{-1}(B)$ $\Longrightarrow A$ è aperto» e «$B \subset Y$ è aperto $\Longrightarrow f^{-1}(B) \subset X$ è aperto», delle due definizioni precedenti, sono ovvie perché derivano direttamente dalla continuità di f.

1.3.8 osservazione :

1) f è una immersione se e solo se X è un sottospazio topologico di Y. La topologia su X è totalmente determinata da quella su Y ed é la meno fine per cui f è continua.

2) f è una identificazione se e solo se Y è un quoziente topologico di X, sotto la relazione di equivalenza $\sim$ in X tale che $x \sim x' \Longleftrightarrow f(x) = f(x')$ dove $x, x' \in X$. La topologia su Y è totalmente determinata da quella su X ed è la più fine per cui f è continua.

1.3.1 Proposizione : Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua e biunivoca allora f è una immersione $\Longleftrightarrow$ è una identificazione $\Longleftrightarrow$ è un omeomorfismo.

Dimostrazione : Supponiamo che f sia una immersione e dimostriamo che è una identificazione. f è surgettiva e preso $B \subset Y$ aperto so che $f^{-1}(B)$ è un aperto di X per continuità di f. Ora si $f^{-1}(B)$ aperto di X, siccome f è una immersione so che per ogni aperto A di X esiste $B' \subset Y$ aperto tale che $A = f^{-1}(B')$, in particolare $f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$, ma f è iniettiva, quindi $B = B'$ e siccome B' aperto allora B aperto. Suppongo ora di avere f identificazione e dimostriamo che f è un omeomorfismo, mi basta dire che f^{-1} è continua. Prendo un aperto $A \in X$, allora $f(A)$ è aperto in Y se e solo se $f^{-1}(f(A))$ è aperto, ma $f^{-1}(f(A)) = A$ (in quanto f è biunivoca) infatti $f^{-1}(f(A)) = \{x \in X \mid f(x) \in \{f(a) \mid a \in A\}\}$ e se esiste $x \notin A$ allora esiste $a \in A$ tale che $f(x) = f(a) \implies x = a$ assurdo. Ora sia f un omeomorfismo e dimostriamo che è una immersione. Devo dimostrare che $A \subset X$ è aperto se e solo se esiste un aperto $B \subset Y$ tale che $f^{-1}(B) = A$, dunque sia A aperto di X, siccome f è omeomorfismo f è aperta, dunque $f(A) = B$ è aperto, e siccome f è biunivoca $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(B) = A$.

$\square$

1.3.3 esempio : Voglio trovare una applicazione che non è ne immersione ne identificazione. Considero l'applicazione identita $Id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e biunivoca, dove rispettivamente ci sono le topologie τ_1 e τ_2, per l'ipotesi di continuità deve valere che τ_1 è più fine di τ_2 infatti sia B un aperto di τ_2 allora $f^{-1}(B) = Id^{-1}(B)$ è un aperto di τ_1. Siccome τ_1 è più fine di τ_2 f non può essere una immersione e per la proposizione precedente neanche una identificazione, dunque ne un omeomorfismo.

1.3.1 Lemma : Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua allora :

1) Se f è iniettiva e (aperta/chiusa) allora f è una immersione (aperta/chiusa).

2) se f è surgettiva e (aperta/chiusa) allora f è una identificazione (aperta/chiusa).

Dimostrazione :

1) Supponiamo f chiusa (è analogo per f aperta). Sia $A \subset X$ un aperto, considero il chiuso $C = X/A$, siccome f chiusa si ha che $f(C)$ è un chiuso di Y, ma $f(C) = f(X/A) = Y/f(A)$ quindi $f(A) = Y/f(C)$ è un aperto di Y e vale che $A = f^{-1}(f(A))$ (in quanto iniettiva) quindi è una immersione.

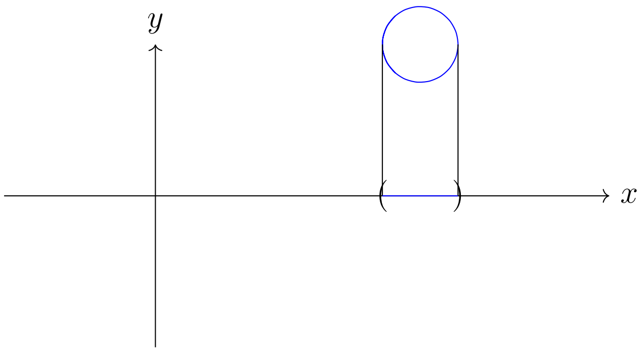
2) Supponiamo f aperta (è analogo per f chiusa). Sia $B \in Y$, so che $f^{-1}(B)$ è aperto di X, ma siccome f aperta allora $f(f^{-1}(B)) = B$ (in quanto surgettiva) è aperto quindi f è una identificazione.

$\square$

1.3.4 esempio : Voglio trovare una applicazione che non è ne aperta ne chiusa. Considero l'immersione $f : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, osserviamo che $[0, 1) = [0, 1) \cap (-1, 1)$ è un aperto di $[0, 1)$ ma $f([0, 1)) = [0, 1)$ non è un aperto di $\mathbb{R}$ e $[0.5, 1) = [0, 1) \cap [0.5, 2]$ è un chiuso di $[0, 1)$ ma

$f([0.5, 1)) = [0.5, 1)$ che non è un chiuso di $\mathbb{R}$.

1.3.5 esempio : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f((x, y)) = xy$ è una identificazione aperta, infatti così definita è surgettiva inoltre è aperta in quanto se prendo una palla aperta di $\mathbb{R}^2$, la sua proiezione è un intorno aperto di $\mathbb{R}$ come si vede :



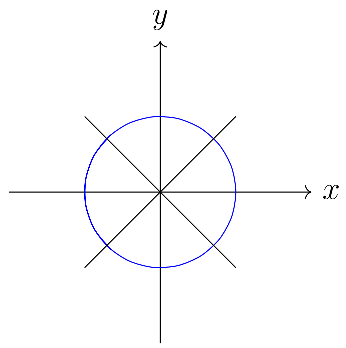
(Figura 4)

1.3.1 Proposizione : Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua, allora è chiusa se e solo se dato $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ unione finita di chiusi C_i allora ogni restrizione $f|_{C_i} : C_i \longrightarrow f(C_i)$ è un omeomorfismo.

Dimostrazione : Supponiamo $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ unione finita di chiusi C_i allora se f chiusa allora ogni restrizione $f|_{C_i} : C_i \longrightarrow f(C_i)$ è una applicazione continua e chiusa quindi è un omeomorfismo, invece se ogni restrizione $f|_{C_i} : C_i \longrightarrow f(C_i)$ è omeomorfismo e sia B un chiuso di X allora $f(B) = f(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap C_i) = \bigcup_{i=1}^{n} f(B \cap C_i)$ (la seconda uguaglianza deriva dalla continuità di f), $B \cap C_i$ chiuso f omeomorfismo allora $f(B \cap C_i)$ chiuso quindi $f(B)$ è unione finita di chiusi quindi è un chiuso allora f è chiusa.

□

1.3.6 esempio : Sia $f : [0, 2\pi] \longrightarrow S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, tale che $f(t) = (cos(t), sen(t))$. Questa applicazione è surgettiva ma non iniettiva, mostro che è una identificazione chiusa e per il lemma 1.3.1 basta mostrare che è una applicazione chiusa. Uso la proposizione precedente, divido S^1 in 8 chiusi come in figura :



(Figura 5)

Considero quindi i chiusi $C_i = [\frac{i\pi}{4}, \frac{(i+1)\pi}{4}]$ con $0 \leq i < 8$, ora la restrizione $f|_{C_i}$ è continua e bigettiva (questo si può vedere graficamente, ogni arco di circonferenza è l'immagine di ogni restrizione), inoltre se considero $f|_{C_i}^{-1} : S^1 \longrightarrow [0, 2\pi]$ tale che $f|_{C_i}^{-1}((x', y')) = arctg(\frac{y'}{x'})$ allora, preso $(cos(t), sen(t))$, si ha che $f|_{C_i}^{-1}((cos(t), sen(t))) = arctg(\frac{sen(t)}{cos(t)}) = t$ dunque preso un chiuso di S^1 la sua immagine tramite f^{-1} è un chiuso perciò ogni restrizione è un omeomorfismo e si ha che f è una identificazione chiusa. Osserviamo infine che f non è aperta in quanto l'aperto $[0, \pi) = [0, 2\pi] \cap (-1, \pi)$ ha immagine non aperta.

1.3.7 esempio : Consideriamo la f dell'esempio precedente, e consideriamo la sua estensione $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, questa è ancora surgettiva, mi chiedo se è aperta. Prendo una base di aperti di $\mathbb{R}$ (sono della forma (a, b)), se $b - a > 2\pi$ allora l'immagine di (a, b) è tutto S^1 quindi è aperta, invece se è minore l'immagine è un arco aperto della circonferenza quindi è aperta. Considero ora il chiuso $C = \{2n\pi + \frac{1}{n}\}_{0<n\in\mathbb{N}}$, ora $f(C) = (cos(\frac{1}{n}), sen(\frac{1}{n}))$ che non è chiuso in quanto 0 è aderente a $f(C)$ ma $0 \notin f(C)$ dunque l'estensione è aperta ma non chiusa.

L'insieme C dell'esempio precedente é detto *discreto*, ovvero un sottospazio Y di uno spazio topologico è discreto in X se la topologia di sottospazio su Y coincide con quella discreta ovvero per ogni $y \in Y$ esiste un aperto U di X tale che $\{y\} = U \cap Y$, come ad esempio $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$.

1.3.6 Definizione : Le *fibre* di $f : X \longrightarrow Y$ sono le preimmagini $f^{-1}(y)$ al variare di $y \in Y$.

1.3.7 Definizione : Sia $Y \subset X$ e $f : X \longrightarrow Z$. si dice che f è costante su Y se e solo se $f(Y)$ è un punto.

1.3.2 Teorema : (Proprietà universale delle identificazioni) Sia $f : X \longrightarrow Y$ una identificazione e sia $g : X \longrightarrow Z$ continua. Allora esiste $\tilde{g} : Y \longrightarrow Z$ continua tale che $g = \tilde{g} \circ f \iff g$ costante sulle fibre di f quindi commuta il diagramma :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione : ($\Longrightarrow$) Supponiamo che $g = \tilde{g} \circ f$ e sia $f^{-1}(y)$ una fibra, per ogni $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$ si ha che $f(x_1) = f(x_2)$ quindi $g(x_1) = \tilde{g} \circ f(x_1) = \tilde{g} \circ f(x_2) = g(x_2)$ quindi g è costante sulle fibre.
($\Longleftarrow$) Supponiamo g costante sulle fibre di f, definisco $\tilde{g} : Y \longrightarrow Z$ tale che l'immagine $\tilde{g}(Y) = g(X)$. L'applicazione è ben definita infatti $\tilde{g}(y) = g(x) = g(f^{-1}) = k$ (costante sulle fibre), inoltre è continua in quanto preso un aperto $B \subset Z$ si ha che $\tilde{g}^{-1}(B)$ è aperto di $Y \Longleftrightarrow f^{-1}(\tilde{g}^{-1}(B))$ è un aperto di X (il se e solo se deriva dal fatto che f è una identificazione), ma $f^{-1}(\tilde{g}^{-1}(B)) = g^{-1}(B)$ che è un aperto dato che g continua quindi $\tilde{g}(B)$ aperto.

$\square$

1.3.9 osservazione : Sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X e sia $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ la proiezione al quoziente, la topologia quoziente su $X/\sim$ implica che $B \subset X/\sim$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(B)$ è aperto di X ovvero π è una identificazione .

1.3.1 Corollario : Sia $g : X \longrightarrow Z$ continua e $\sim$ una relazione di equivalenza su X allora esiste $\tilde{g} : X/\sim \longrightarrow Z$ con $g = \tilde{g} \circ \pi \Longleftrightarrow g$ è costante sulle classi di equivalenza che solo le fibre di g.

1.3.10 osservazione : Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua, definiamo in X la relazione di equivalenza $\sim$ tale che $x \sim x' \Longleftrightarrow f(x) = f(x')$. Usando quanto detto prima ho

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/\sim \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

e $\tilde{f}$ è un omeomorfismo se e solo se f è una identificazione. Con questo sto dicendo che le identificazioni sono tutte e sole le proiezioni al quoziente a meno di omeomorfismi.

1.3.2 Proposizione : Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua e sia la relazione di equivalenza $\sim$ tale che $x, x' \in X$ allora $x \sim x' \Longleftrightarrow f(x) = f(x')$. Allora f è identificazione $\Longleftrightarrow \tilde{f}$ è omeomorfismo dove vale il diagramma a sinistra

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\ & X/\sim \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \arrow[dl, bend left, "\tilde{\pi}"] \\ & X/\sim \arrow[ur, bend left, "\tilde{f}"] & \end{tikzcd}$$

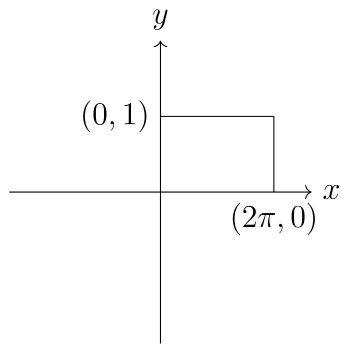
Dimostrazione : ($\Longrightarrow$) Supponiamo che f sia una identificazione, consideriamo il diagramma a destra e so che vale $\pi = \tilde{\pi} \circ f$ e $f = \tilde{f} \circ \pi$, voglio dire che $\tilde{f} \circ \tilde{\pi} = Id_Y$ e $\tilde{\pi} \circ \tilde{f} = Id_{X/\sim}$. Per ogni $y \in Y$, siccome f è un identificazione allora è surgettiva quindi esiste $x \in X$ tale che $y = f(x)$, ora $\tilde{f} \circ \tilde{\pi}(f(x)) = \tilde{f} \circ (\tilde{\pi} \circ f)(x) = \tilde{f} \circ \pi(x) = f(x)$ inoltre per ogni $x' \in X/\sim$ siccome π è surgettiva esiste $x \in X$ tale che $x' = \pi(x)$, ora $\tilde{\pi} \circ \tilde{f}(\pi(x)) = \tilde{\pi} \circ (\tilde{f} \circ \pi)(x) = \tilde{\pi} \circ f(x) = \pi(x)$ quindi ho ottenuto che $\tilde{f} \circ \tilde{\pi} = Id_Y$ e $\tilde{\pi} \circ \tilde{f} = Id_{X/\sim}$ dunque sono una l'inversa dell'altra e sono continue perciò sono omeomorfismi.
($\Longleftarrow$) Supponiamo ora che $\tilde{f}$ sia un omeomorfismo, allora f è surgettiva e Y ha la stessa topologia di $X/\sim$ che è quella quoziente, vale allora che $B \subset Y$ aperto $\Longleftrightarrow$ $\tilde{f}^{-1}(B)$ aperto di $X/\sim \Longleftrightarrow \pi^{-1} \circ \tilde{f}^{-1}(B) = (\bar{f} \circ \pi)^{-1} = f^{-1}(B)$ aperto di X, dove il primo se e solo se deriva dal fatto che $\bar{f}$ è omeomorfismo, quindi f è una identificazione.

$\square$

1.3.8 Definizione : Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subset X$ sottoinsieme, definiamo una relazione di equivalenza $\sim$ in X tale che $x, x' \in X$ allora $x \sim x' \Longleftrightarrow x = x'$ oppure $x, x' \in Y$, allora lo spazio quoziente $X/\sim$ denotato come X/Y è detto *contrazione*. In quanto Y viene contratto ad un punto nel quoziente.

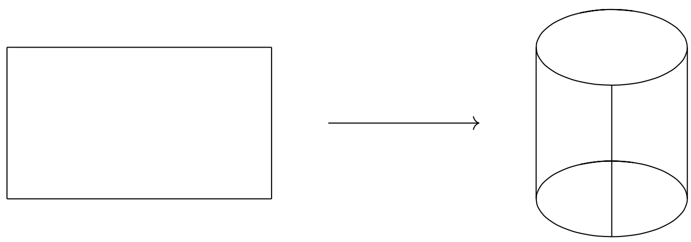
1.3.8 esempio : Sia $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ e sia $X = \mathbb{R}/[0, 1)$ una contrazione, allora $p : \mathbb{R} \longrightarrow X$ è una identificazione, voglio vedere se è aperta o chiusa. Prendiamo il chiuso $\{0\}$ e l'aperto $(0, 1)$ di $\mathbb{R}$, allora $p(0) = p((0, 1)) = p([0, 1))$ in quanto la contrazione, per quanto detto dalla definizione, è indotta da una relazione che identifica i punti di $Y = [0, 1)$. Osserviamo che l'immagine $p([0, 1))$ non è ne aperta ne chiusa in quanto lo è se la sua preimmagine è aperta o chiusa ma $p^{-1}(p(0)) = p^{-1}p([0, 1)) = [0, 1)$ e $p^{-1}p((0, 1)) = p^{-1}p([0, 1)) = [0, 1)$ ma $[0, 1)$ non è ne aperto ne chiuso in $\mathbb{R}$ quindi p è una identificazione ne aperta ne chiusa.

1.3.9 esempio : Consideriamo il rettangolo $X = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ in $\mathbb{R}^2$ come in figura :



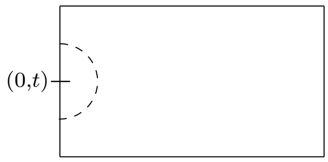
(Figura 6)

Ora identifico i lati paralleli verticali tramite la relazione di equivalenza $\sim$ tale che $(x,y) \sim (x',y') \iff (x,y) = (x',y')$ oppure $(x = 0, x' = 2\pi$ e $y = y')$. Ottengo così la contrazione $Y = X/\sim$, ovvero ho semplicemente "incollato" i lati verticali ottenendo un cilindro con la topologia quoziente, come in figura :



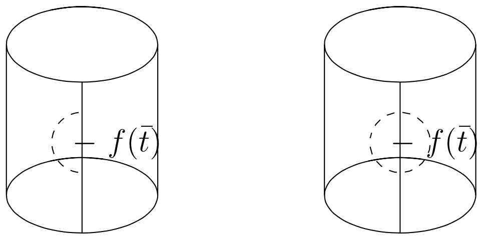
(Figura 7)

Mi chiedo se la topologia di quoziente che ho sul cilindro è la stessa topologia che ho sul cilindro in $\mathbb{R}^3$. Sia C_0 il cilindro in $\mathbb{R}^3$ è considero l'applicazione $f : Y \longrightarrow C_0$, vorrei dimostrare che è un omeomorfismo così ho l'equivalenza, e per la proposizione precedente mi basta vedere se l'applicazione $g : X \longrightarrow C_0$ tale che $g((s,t)) = (cos(s), sen(s), t)$ è una identificazione. g è banalmente surgettiva, dunque per il lemma 1.3.1 mi basta vedere se è aperta o chiusa. Prendiamo un punto sul lato verticale $\bar{t} = (0,t)$ e consideriamo un intorno aperto di questo punto come in figura :



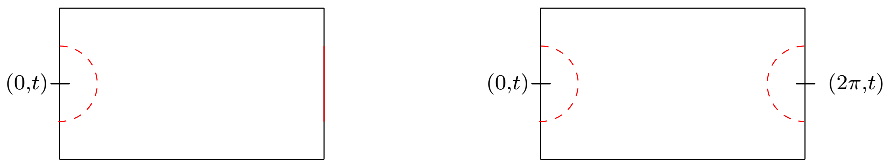
(Figura 8)

che per la topologia di sottospazio che c'è sul rettangolo è l'intersezione tra il esso e una palla centrata in $(0, t)$. Osserviamo che l'immagine tramite g non è un intorno aperto di $f(\bar{t})$ infatti dal disegno si vede :



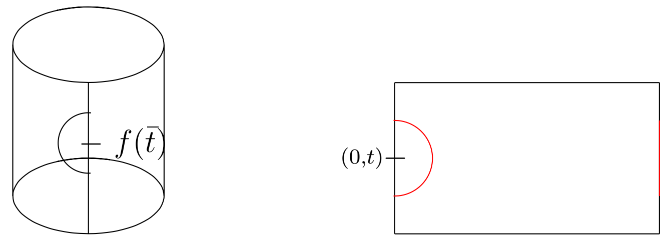
(Figura 9)

a sinistra c'è l'immagine dell'aperto di prima e a destra c'è un aperto di $f(\bar{t})$, di fatto si ha che la controimmagine di questi rispettivamente :



(Figura 10)

a sinistra non c'è ne un aperto ne un chiuso, a destra si ha un aperto, dunque l'applicazione non è aperta. Per quanto riguarda un chiuso ragionando in modo analogo si ha che preso all'interno o nei lati non identificati del quadrato l'applicazione manda il chiuso in un chiuso, invece se lo prendiamo come prima in $(0, t)$ sul lato verticale identificato dall'applicazione si ha che l'immagine è la semi luna che è un chiuso dato che ha controimmagine chiusa come si vede dalla figura :



(Figura 11)

quindi l'applicazione è chiusa e perciò è una identificazione. Considero ora il chiuso $S = \{0, 2\pi\} \times [0,1]$ che sono semre i lati verticali del rettangolo, l'applicazione che manda X nella contrazione X/S è aperta, come si può vedere intuitivamente non cè più il problema dei lati verticali perché vengono identificati ad un punto. Con la considerazione precedente avremmo avuto che la controimmagine dalla semi luna sul cilindro sarebbe stata aperta. Osserviamo inoltre che se avessimo cambiato relazione di equivalenza identificando sempre i lati verticali ma mettendo in relazione il punto $(0,t)$ con il punto $(2\pi, 1-t)$ avremmo ottenuto un *nastro di Möbius*.(immagine da vedere)

1.4 Spazi Proiettivi

1.4.1 Definizione : (Nei reali) Si indica con $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim$ lo *spazio proiettivo* dove $x \sim y \iff x = \lambda y$ con $\lambda \neq 0$. Consideriamo $\gamma : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tale che $\gamma((x_0, \cdots, x_n)) = [x_0, \cdots, x_n]$, dove $[x_0, \cdots, x_n]$ sono dette *coordinate omogenee*, questa è una applicazione che identifica le rette di $\mathbb{R}^{n+1}$, dunque le fibre sono rette. Consideriamo $U_i = \{[x_0, \cdots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$, questo è un aperto infatti, per la topologia quoziente, deve valere che $\pi^{-1}(U_i)$ è aperto, e infatti $\pi^{-1}(U_i) = \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \mid x_i \neq 0\}$ che è aperto. Gli U_i si chiamano $carte\ affini$, il complementare $H_i = \{[x_0, \cdots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i = 0\} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - U_i$ è un chiuso ed è un $iperpiano\ all'infinito\ di\ U_i$, abbiamo inoltre che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$.

1.4.1 osservazione : (da vedere) U_i è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ infatti sia $\pi_i : \pi^{-1}(U_i) = \tilde{U_i} \longrightarrow U_i$, questa è una identificazione tale che $\pi_i = \pi|_{\tilde{U_i}}$. Ora considero il diagramma :

$$\begin{tikzcd} \tilde{U_i} \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & \mathbb{R}^n \\ & U_i \arrow[ur, "\tilde{f_i}"'] & \end{tikzcd}$$

dove $f_i((x_0\cdots,x_n)) = (\frac{x_0}{x_i},\cdots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\cdots,\frac{x_n}{x_i}) =$ ..., e f_i è costante sulle fibre di π_i (che sono rette). Ora $U_i = \tilde{U_i}/\sim$ quindi $\tilde{f}_i([x_0,\cdots,x_i]) = (\frac{x_0}{x_i},\cdots,\cdots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\cdots\cdots,\frac{x_n}{x_i})$, voglio vedere che $\tilde{f}$ è un omeomorfismo. Consideriamo il diagramma :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{U_i} \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\pi_i"] & & \mathbb{R}^n \arrow[rr, "j_i"] \arrow[dr, "g_i"] & & \mathbb{R}^{n+1}-\{0\} \arrow[dl, "\tilde{\pi_i}"] \\
& U_i \arrow[ur, "\tilde{f}_i"] & & U_i &
\end{tikzcd}$$

dove ogni applicazione è continua e $j_i((y_0,\cdots,y_{n-1})) = (y_0,\cdots,y_{i-1},1,y_{i+1},\cdots,y_{n-1})$, basta verificare che g_i è l'inversa di $\tilde{f}_i$ e in effetti si ha $[x_0,\cdots,x_n] \xrightarrow{\tilde{f}_i} (\frac{x_0}{x_i},\cdots,\hat{x_i},\cdots,\frac{x_n}{x_i}) \xrightarrow{g_i} [x_0,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n] = [x_0,\cdots,x_n]$.

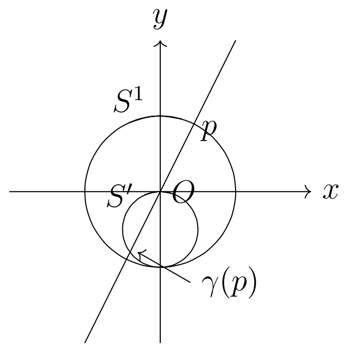
1.4.1 esempio : $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = U_0 \cup H_0 = \mathbb{R}^2 \cup H_0$, dove $U_0 = \{[x_0,x_1,1] \mid x_0,x_1 \in \mathbb{R}\}$ e $H_0 = \{[x_0,x_1,0] \mid x_0,x_1 \in \mathbb{R}/\{0\}\}$. Le rette parallele di $\mathbb{R}^2$ si intersecano tutte in un punto all'infinito, infatti consideriamo una retta qualsiasi della forma $(\lambda t + a, \mu t + b)$ con $t \in \mathbb{R}$, nel proiettivo le rette sono $[\lambda t + a, \mu t + b, 1] = [\lambda + \frac{a}{t}, \mu + \frac{b}{t}, \frac{1}{t}]$che per $t \rightsquigarrow \infty$ si ha $[\lambda,\mu,0] \in H_0$ questo è il vettore direzione della retta.

1.4.2 osservazione : Possiamo pensare $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ come quoziente della sfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ infatti definiamo la relazione di equivalenza $\sim$ in S^n tale che $x \sim y \iff x = \pm 1$ allora considerando il diagramma

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & \mathbb{R}^{n+1}/\{0\} \arrow[r, "x\mapsto \frac{x}{||x||}"] \arrow[d, "\pi"] & S^n \arrow[d, "\pi_2"] \\
S^n/\sim \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \arrow[r, "g"] & S^n/\sim
\end{tikzcd}$$

f, g sono continue ed una inversa dell'altra, quindi $S^n/\sim \simeq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

1.4.2 esempio : Voglio vedere che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Definiamo S' come la circonferenza unitaria in $\mathbb{R}^2$ centrata i $(0,\frac{1}{2})$ è raggio $\frac{1}{2}$, considero inoltre l'applicazione $\gamma : S^1 \longrightarrow S'$ che prende un punto $p \neq (\pm 1, 0)$ e restituisce il punto di intersezione tra la retta passante per p e l'origine con S', e nel caso di $p = (\pm 1, 0)$ si ha $\gamma(p) = 0$, come si vede graficamente



(Figura 12)

Tale γ è continua, surgettiva e aperta quindi è una identificazione, considerando la relazione di equivalenza $\sim$ su S^1 tale che (da vedere) $x \sim y \iff \gamma(x) = \gamma(y) \iff x = \pm 1y$ o equivalentemente $x \sim y \iff \gamma(x, y) = (-x_1x_2, -x_2^2)$ si ha allora che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq S^1/\sim \simeq S'$, esplicitamente l'omeomorfismo è definito da $\gamma([x_0, x_1]) = (\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{2x_1x_2}{x_0^2 + x_1^2})$.

1.4.3 osservazione : Gli spazi proiettivi in $\mathbb{C}$ sono analoghi a quelli in $\mathbb{R}$. si ha $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1}/\{0\})/\sim$ dove $x \sim y \iff x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{C}/\{0\}$, si definiscono ugualmente le carte affini U_i e vale che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$, si definiscono le coordinate omogenee analogamente come $[z_0, \cdots, z_n]$.

1.4.3 esempio : $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2 \subset \mathbb{R}^3$, esplicitamente l'omeomorfismo è $\gamma([z_0, z_1]) = (\frac{|z_0|^2 - |z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{\bar{z_0}z_1 - \bar{z_1}z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{\bar{z_0}z_1 + \bar{z_1}z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2})$.

1.5 Prodotti di spazi topologici

1.5.1 Definizione : Siano X, Y spazi topologici, è consideriamo l'insieme $X \times Y$. La *topologia prodotto* sull'insieme $X \times Y$ è la meno fine tra quelle che rendono continue le proiezioni $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ e $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$.

Potremmo chiederci se una topologia meno fine esiste effettivamente, per rispondere a questa domanda basta considerare tutte le topologie per cui le due proiezioni sono continue e ne facciamo l'intersezione e questa si dimostra essere la meno fine. Consideriamo ora l'insieme dei prodotti $U \times V$ dove U è un aperto di X e V è un aperto di Y con X, Y spazzi topologici.

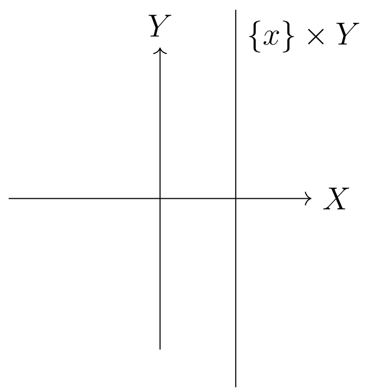
1.5.1 Proposizione : L'insieme dei prodotti definito prima è una base di una topologia.

Dimostrazione : Bisogna verificare le ipotesi del teorema 1.1.2. Ovviamente tutto lo spazio $X \times Y$ è prodotto di due aperti di X e Y, resta de verificare che l'intersezione di due elementi $A \times B$ e $C \times D$ è unione di prodotti; $A \times B \cap C \times D = (A \cap C) \times (B \cap D)$ quindi è una base di una topologia i cui aperti sono unioni arbitrarie di elementi della base ovvero di prodotti.
□

1.5.2 Proposizione : La topologia prodotto della definizione 1.5.1 e la topologia generata dall'insieme dei prodotti della proposizione precedente sono equivalenti.

Dimostrazione : Intanto mostro che con la topologia generata da una base di prodotti le proiezioni $\pi_X,\ \pi_Y$ sono continue. Consideriamo π_X prendo un aperto U di X, allora $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ che è un aperto, in analogia per pi_Y, prendo un aperto V di Y allora $\pi_Y^{-1}(V) = X \times V$. Quindi questa topologia rende continue le proiezioni, siccome le topologia prodotto della definizione 1.5.1 è la meno fine che fa questo allora la topologia prodotto è contenuta in quella generata da i prodotti di aperti, resta da dimostrare l'altra inclusione. Prendo un aperto A della topologia generata dai prodotti, questo sarà unione arbitraria di $U \times V$,ovvero $A = \bigcup U_i \times V_i$, osservo che $U_i \times V_i = \pi_X^{-1}(U_i) \cap \pi_Y^{-1}(V_i)$, $\pi_X^{-1}(U_i),\ \pi_Y^{-1}(V_i)$ sono aperti della topologia prodotto quindi anche A è unione di elementi della topologia prodotto quindi abbiamo dimostrato l'uguaglianza.
□

1.5.1 esempio : Consideriamo il sottoinsieme $\{x\} \times Y$ come rappresentato in figura



(Figura 13)

Questo ha anche struttura di sottospazio in quanto un aperto è della forma $\{x\} \times V =$

$(\{x\} \times Y) \cap (U \times V)$ dove U è un aperto di X che contiene x.

1.5.2 esempio : L'applicazione $f : Y \longrightarrow \{x\} \times Y$ tale che $f(a) = (x, a)$ è un omeomorfismo.

1.5.3 Proposizione : Sia $f : Z \longrightarrow X \times Y$ e consideriamo le proiezioni $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ e $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$. f è continua $\iff$ $\pi_X \circ f$ e $\pi_Y \circ f$ sono continue.

Dimostrazione : Consideriamo il diagramma

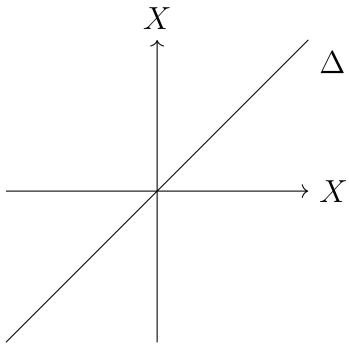
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] & X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"] & Y \\ & X & \end{tikzcd}$$

($\Longrightarrow$) Si ha che f, π_X, π_Y sono continue, la composizione di applicazioni continue è continua quindi $\pi_X \circ f$ e $\pi_Y \circ f$ sono continue.
($\Longleftarrow$) Si ha che $\pi_X \circ f$ e $\pi_Y \circ f$ sono continue, pendiamo un aperto $U \times V$ di $X \times Y$, allora si ha che $f^{-1}(U \times V) = (\pi_X \circ f)^{-1}(U) \cap (\pi_Y \circ f)(V)$, che è un aperto.

□

1.5.4 Proposizione : Uno spazio topologico X è $T_2 \iff$ la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ è chiuso.

Dimostrazione : Si può vedere graficamente la diagonale dalla figura che risulta essere intuitivamente lo spazio $\{x\} \times \{x\}$



(Figura 14)

Ora sia $U \times V$ un aperto di $X \times X$, si osserva che $U \cap V \subset \Delta$ e che $U \cap V$ è un aperto di X, ora per ogni $(x, y) \in X \times X/\Delta$ siccome X è T_2 esistono due intorni U, V tale che $x \in U,\ y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$ quindi $U \times V$ è intorno di (x, y) ed 'e contenuto in $X \times X/\Delta$ quindi $X \times X/\Delta$ è aperto è di conseguenza Δ è chiuso.

$\square$

1.5.1 Corollario : Siano $f : X \longrightarrow Y$ e $g : X \longrightarrow Y$ continue dove X, Y spazi topologici e Y è T_2. Allora L'insieme $K = \{x \mid f(x) = g(x)\}$ è chiuso.

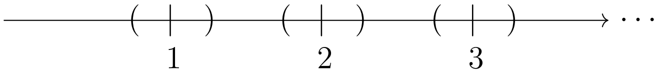
Dimostrazione : Considero l'applicazione $\phi : X \longrightarrow Y \times Y$ tale che $\phi(x) = (f(x), g(x))$, K è la diagonale di $Y \times Y$ e siccome Y è T_2 allora K è chiuso.

$\square$

1.5.1 osservazione : Due funzioni continue su $\mathbb{R}$ se coincidono su $\mathbb{Q}$ allora sono uguali, infatti abbiamo che $\mathbb{R}$ è T_2 e $\mathbb{Q} \subset \{x \mid f(x) = g(x)\}$ che è un chiuso dato che $\mathbb{R}$ è T_2, ma siccome $\mathbb{Q}$ è denso l'unico chiuso che contiene $\mathbb{Q}$ è tutto $\mathbb{R}$ quindi $\{x \mid f(x) = g(x)\} = \mathbb{R}$ di conseguenza $f = g$.

Facciamo un attimo un excursus di analisi, ricordiamo alcune definizioni. Consideriamo $\mathbb{R}$, un punto di un insieme è detto di accumulazione se ogni intorno del punto non contiene i punto stesso che a differenza del punto di aderenza e che ogni intorno deve essere non vuoto quindi possono contenere solo anche il punto stesso, e poi i punti limite che sono punti di accumulazione che appartengono all'insieme, per esempio $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha 0 come punto di accumulazione ma non è punto limite. Con questi concetti si posso costruire le successioni, questo però sono a stretto contatto con il concetto di sistema di intorni numerabile che è un concetto che si ritrova benissimo in $\mathbb{R}$ per questo l'analisi si fa su questo insieme, per esempio in $\mathbb{C}$ non si hanno tutte le proprietà come in $\mathbb{R}$, per esempio $\mathbb{C}$ è ordinabile come insieme, dato che $\mathbb{C}$ è equipotente a $\mathbb{R}$, e sia γ una bigezione, allora $x, y \in \mathbb{R}$ si ha $\gamma(x) < \gamma(y) \Longleftrightarrow x < y$, ma $\mathbb{C}$ come corpo non è ordinabile, per esempio basta vedere che $1 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$. Ora mostrerò un esempio di uno spazio che possiede un intorno non numerabile.

1.5.3 esempio : Consideriamo $\mathbb{R}$ è consideriamo la relazione di equivalenza $\sim$ tale che $x \sim y \Longleftrightarrow x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Z}$, si ottiene così il quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ che lo possiamo immaginare come un fiore con infiniti petali, praticamente identifichiamo tutti punti di $\mathbb{Z}$ e gli intervallini tra un intero ed il successivo formano un petalo. Questo non si immerge in $\mathbb{R}$ infatti (da vedere), (boh da vedere se identifico $(0, 1)$ ad un punto il quoziente non è T_2, e se identifico ad un punto $\mathbb{R} - [0, 1]$ il quoziente è insiemisticamente S^1 ma non è omeomorfo a S^1). Consideriamo un punto di $\mathbb{Z}$ nel quoziente si riduce al punto centrale del fiore che chiameremo ω, un intorno di questo è formato da tanti archetti ed ha controimmagine in $\mathbb{R}$ come una unione disgiunta di intervalli come in figura



(Figura 15)

Supponiamo ora che questo ω abbia un sistema fondamentale di intorni numerabile, chiamiamo V_i gli intorni di questo sistema fondamentale, allora i $\pi^{-1}(V_i)$ saranno unioni disgiunte di intorni dei punti di $\mathbb{Z}$ come fatto vedere dalla figura, e chiamiamo questi intorni U_{ij}, intorno di j, quindi $\pi^{-1}(V_i) = \bigcup U_{ij}$, ora osservo che se a U_{ij} ci levo un punto ottenendo $U_{ij}/\{x\}$ questo rimane ancora un intorno di j in quanto $U_{ij}/\{x\} = U_{ij} \cap \mathbb{R}/x$. Ora se i V_i sono numerabili li posso mettere in successione in questo modo

$$\begin{array}{r}
\pi^{-1}(V)_1 = U_{11} \cup U_{12} \cup U_{13} \cup \cdots \\
\pi^{-1}(V)_2 = U_{21} \cup U_{22} \cup U_{23} \cup \cdots \\
\pi^{-1}(V_3) = U_{31} \cup U_{32} \cup U_{33} \cup \cdots \\
\pi^{-1}(V_4) = U_{41} \cup U_{42} \cup U_{43} \cup \cdots \\
\cdots
\end{array}$$

Ora all'aperto U_{ii} tolgo un punto $x_i \notin \mathbb{Z}$ ottenendo $U_{ii}/\{x_i\}$ e costruisco l'aperto $V = \bigcup U_{ii}/\{x_i\}$, V non contiene nessuno dei V_i perché se ne contenesse uno, conterrebbe anche U_{ii}, per un certo i, ma non lo contiene perchè gli manca il punto $x_i \in U_{ii}$, siccome $\pi(V)$ è ancora un intorno di ω allora i V_i non sono un sistema fondamentale di intorni di conseguenza non può essere numerabile.

In analogia all'esempio precedente si può dimostrare che $\mathbb{R}$ non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile in $\mathbb{R}^2$ (da vedere : se $\mathbb{R}$ lo quoziento ad un punto, il risultato non si immerge in $\mathbb{R}^n$). Con ciò per concludere che il quoziente sembra non conservare nessuna proprietà.
Abbiamo visto che $\mathbb{R}$ lo possiamo costruire con le sezioni di Dedekind, questo metodo usa implicitamente il concetto di connessione (oppure le classi contigue), non è l'unico modo, per esempio con Bolzano-Weierstrass si usa il concetto di compatto oppure anche lo si può costruire con le successioni di Cauchy, mettendo una relazione di equivalenza per cui due successioni sono equivalenti se hanno lo stesso limite e le classi sono i punti di $\mathbb{R}$ è questo usa implicitamente il concetto di completezza. Vorremmo ritrovare questi concetti anche in uno spazio topologico, la completezza non la approfondiamo ora dato che completo significa che ogni successione di Cauchy converge nell'insieme e la successione come abbiamo detto prima è un concetto che ha bisogno di molto prima di essere definito.

Capitolo 2

Connessione e Compattezza

2.1 Insiemi connessi

2.1.1 Definizione : Sia X uno spazio topologico

1) X è connesso $\Longleftrightarrow$ gli unici sottoinsiemi aperti e chiusi sono $\emptyset$ e X.

2) X è connesso $\Longleftrightarrow$ non esistono due aperti non vuoti A, B tale che $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$.

3) X è connesso $\Longleftrightarrow$ non esistono due chiusi non vuoti A, B tale che $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$.

2.1.1 Proposizione : Le definizioni 1), 2), 3) sono equivalenti.

Dimostrazione : (1) $\Longrightarrow$ 2)) Supponiamo di trovare A, B aperti non vuoti tale che $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$, ora $A = X/B$, B aperto quindi A chiuso, quindi A è aperto è chiuso non vuoto quindi è X, ma $A \cap B = X \cap B = B \neq \emptyset$ assurdo.
(2) $\Longrightarrow$ 3)) Supponiamo di trovare A, B aperti non vuoti tale che $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$, ora $A = X/B$ e $B = X/A$ quindi A, B sono aperti non vuoti tale $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$ assurdo.
(3) $\Longrightarrow$ 1)) Supponiamo che esista un insieme A, aperto e chiuso non banale allora $B = X/A$ è aperto e chiuso inoltre $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$ assurdo.

$\square$

2.1.1 osservazione : (da vedere) Un punto in $\mathbb{R}$ è chiuso, ma non lo è perchè non è aperto, ma perchè $\mathbb{R}$ è connesso.

2.1.2 osservazione : Sia $Y \subset X$, se A aperto e chiuso, e Y connesso allora $Y \cap A = \emptyset$ oppure a $Y \subset A$.

2.1.1 Teorema : Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua, allora se X è connesso anche $f(X)$ è connesso.

Dimostrazione : (da vedere)Supponiamo che ci sia Z aperto e chiuso in $f(X)$, allora per la topologia indotta su $f(X)$ si ha che esistono un aperto A ed un chiuso B tale che $Z = f(X) \cap A = f(X) \cap B$ quindi $f^{-1}(Z) = f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$, che per continuità vale che $f^{-1}(Z)$ è aperto e chiuso in X, ma X connesso quindi $f^{-1}(Z) \in \{\emptyset, X\}$ quindi $Z = \{\emptyset, f(X)\}$. $\square$

2.1.3 osservazione : Il quoziente è una applicazione continua quindi il quoziente di un connesso è connesso, quindi abbiamo trovato una proprietà che il quoziente non distrugge.

2.1.1 esempio : $[0, 1]$ è connesso con la topologia euclidea, infatti supponiamo che non lo sia allora esistono A, B chiusi tale che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = [0, 1]$, ora consideriamo l'insieme $\{[0, x] \mid [0, x] \subset A\}$ e considero il sup di questo insieme e lo chiamo c, siccome A é chiuso il c è contenuto in A, di conseguenza $(c, 1] \subset B$, ma B è chiuso quindi $[c, 1] \subset B$ ma allora $c \in A \cap B$ assurdo.

2.1.4 osservazione : (da vedere) $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $[0, 1]$, se lo fosse allora $f(0) \in \mathbb{R}$ dove f omeomorfismo ma quindi $\mathbb{R}$? risulta sconnesso .

2.1.2 Definizione : Un *arco* che unisce due punti p, q di uno spazio topologico X è una funzione continua $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

2.1.5 osservazione : $[0, 1]$ è connesso e γ continua quindi l'arco è connesso, è una (da vedere) curva connessa.

2.1.3 Definizione : X è *connesso per archi* $\iff$ per ogni coppia di punti $p, q \in X$ esiste un arco che li collega, ovvero una funzione continua $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

2.1.6 osservazione : Un insieme connesso per archi è connesso, infatti se non lo fosse esisterebbero due aperti non vuoti e disgiunti la cui unione darebbe tutto X ma se prendiamo un punto in un insieme ed un altro punto in quell'altro sconnesso, l'arco che li collega è sconnesso che è assurdo.

2.1.7 osservazione : Il viceversa non è sempre vero, ovvero non è detto che un insieme connesso sia connesso per archi.

2.1.4 Definizione : Un insieme A si dice *convesso* se per ogni $x, y \in A$ e $t \in [0, 1]$ si ha che $tx + (1 - t)y \in A$.

2.1.8 osservazione : Un insieme convesso è connesso per archi, difatto $[0,1]$ è convesso quindi connesso per archi quindi connesso, inoltre $(0,1]$, $[]0,1)$, $(0,1)$ sono connessi ma non omeomorfi.

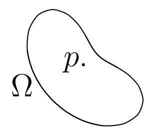
2.1.2 Teorema : In $\mathbb{R}$ un insieme e convesso $\Longleftrightarrow$ è connesso.

2.1.9 osservazione : (da vedere) L'applicazione dell'esempio 1.1.3, sappiamo essere biunivoca e con Peano la possiamo rendere continua, però non può essere un omeomorfismo in quanto il segmento meno un punto è sconnesso invece il quadrato meno un punto è sempre connesso.

2.1.2 esempio : Un disco aperto è connesso infatti è convesso quindi connesso per archi e perciò connesso.

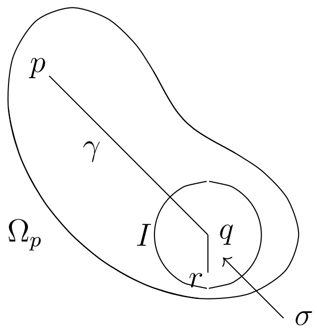
2.1.3 Teorema : Un aperto di $\mathbb{R}^2$ connesso è connesso per archi.

Dimostrazione : Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ e sia p un punto, come in figura



(Figura 16)

Consideriamo $\Omega_p = \{q \in \Omega \mid$ esiste un arco che connette p a $q\}$, è non vuoto perchè ci sta p stesso, voglio dire che $\Omega_p = \Omega$, se dimostriamo che Ω_p è sia aperto che chiuso, siccome Ω è connesso, allora $\Omega_p \in \{\emptyset, \Omega\}$, siccome è non vuoto, si ha $\Omega_p = \Omega$ e quindi la tesi. Dimostriamo che Ω_p è aperto, devo far vedere che è intorno di ogni suo punto, ovvero per ogni $q \in \Omega_p$ esiste un intorno $q \in I$ tale che $I \subset \Omega_p$, sappiamo che esiste un arco $\omega : [0,1] \longrightarrow \Omega$ che unisce p e q tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$, ora consideriamo I, posso considerare un disco l'aperto che so essere connesso per archi quindi per ogni punto r del disco esiste un arco $\sigma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ tale che $\sigma(0) = q$ e $\sigma(1) = r$ che connette q con r come in figura



(Figura 17)

ora consideriamo l'applicazione $\tau : [0,1] \longrightarrow \Omega$ definita da : $\tau(t) = \gamma(2t)$ per $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ e $\tau(t) = \sigma(2t-1)$ per $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, così definito τ è un arco che unisce p ed r quindi $I \subset \Omega_p$ quindi è aperto. Dimostriamo ora che Ω_p è chiuso, consideriamo il complementare Ω/Ω_p, considero il punto s nel complementare, non è ovviamene collegato a p, consideriamo ora un intorno di s, questo è connesso per archi quindi s è connesso con ogni punto dell'intorno tramite un arco, ora se uno di questi punti dell'intorno fosse connesso a p allora in modo analogo a prima troviamo un arco che unisce s con p assurdo, quindi l'intorno sta tutto contenuto nel complementare ovvero ho dimostrato che Ω/Ω_p è aperto quindi Ω_p è chiuso e si ha la tesi.

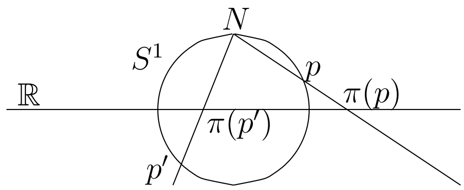
$\square$

2.1.10 osservazione : Il teorema vale anche in $\mathbb{R}^n$.

2.1.5 Definizione : Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso per archi* se e solo se per punto p esiste un sistema fondamentale di intorni, di questo punto, connesso per archi.

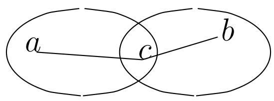
2.1.4 Teorema : Uno spazio localmente connesso per archi e aperto è connesso per archi.

2.1.3 esempio : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n/\{x\}$, S^n sono connessi per archi. Non è scontato che S^n sia connesso per archi, Considero la *proiezione stereografica* $\pi : S^n/\{punto\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ che ad un punto di S^n associa un punto di $\mathbb{R}^n$ come in figura, mostro nel caso di S^1



(Figura 18)

Divido S^n in due componenti ed ognuna di queste la proietto su $\mathbb{R}^n$, in questo modo posso esprimere S^n come unione di due $\mathbb{R}^n$, sappiamo che $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi inoltre questi due hanno anche intersezione non vuote, ora dico che l'unione di due insiemi connessi per archi con intersezione non vuote è connessa, infatti basta trovare un arco che collega i punti dei due insiemi, prendiamo un punto dell'intersezione c e un punto qualsiasi a del primo insieme ed un secondo b qualsiasi del secondo insieme, il primo insieme e connesso per archi quindi esiste un arco tra a e c ma anche il secondo insieme è connesso per archi quindi esiste un arco tra c e b ora in modo analogo al teorema 2.1.3 si trova un arco tra a e b come si vede in figura



(Figure 19)

quindi ritornando a prima S^n è unione di due $\mathbb{R}^n$ connessi per archi e con intersezione non banale quindi S^n è connesso per archi.

2.1.5 Teorema : Sia $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $x \in S^n$ tale che $f(x) = f(-x)$.

Dimostrazione : considero $g = f(x) + f(-x)$ è continua perchè composizione di funzioni continue, so che $g(S^n)$ è un intervallo voglio che contenga 0, osservo che $\frac{1}{2}g(y) + \frac{1}{2}g(-y) = 0$ (da vedere) quindi $g(y) = -g(-y)$ ovvero $g(y)g(-y) < 0$ quindi per il teorema degli zeri esiste x tale che $g(x) = 0$.

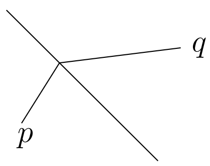
□

2.1.11 osservazione : Ogni funzione continua $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$ non è iniettiva.

2.1.12 osservazione : Un aperto di $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a nessun aperto di $\mathbb{R}^n$ infatti se lo fosse manderebbe un aperto meno un punto, che è sconnesso in $\mathbb{R}$, in un aperto meno un un punto, che è connesso in $\mathbb{R}^n$, invece (da vedere) un aperto di $\mathbb{R}^3$ è omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^2$ (teorema di ...).

2.1.2 Proposizione : $\mathbb{R}^2/\mathbb{Q}^2$ è connesso, in generale $\mathbb{R}^2/\{$ insieme numerabile$\}$ è connesso.

Dimostrazione : Considero due punti p, q in $\mathbb{R}^2/A$, A numerabile, considero una retta che passa in mezzo ai due punti e considero tutti i percorsi p-retta -q come in figura



(Figura 20)

L'insieme dei percorsi ha cardinalità del continuo, se tutti questi intersecano A vuol dire che A è infinito continuo, assurdo, quindi esiste un percorso che unisce p e q e sta tutto in $\mathbb{R}^2/A$.

$\square$

2.1.3 Proposizione : Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora esisto al più due punti per cui $f^{-1}(x)$ ha cardinalità al più numerabile.

Dimostrazione : Consideriamo un segmento di $\mathbb{R}$ questo è connesso ma $S/\{x\}$, se x non sta fra i due bordi ovvero è interno al segmento, non è connesso quindi (da vedere) $f^{-1}(S/\{x\}) = f^{-1}(S)/f^{-1}(\{x\})$ non è connesso, ma $f^{-1}(S)$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$ e un aperto di $\mathbb{R}^2$ meno un insieme numerabile è connesso quindi $f^{-1}(x)$ non è numerabile, quindi al più nei casi di bordo del segmento si ha che $f^{-1}(x)$ è numerabile.

$\square$

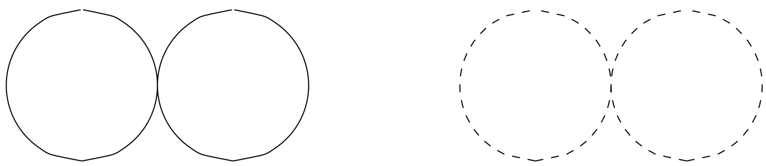
2.1.6 Definizione : Sia $C \subset X$, se C è connesso e se ogni connesso A tale che $A \supset C \Longrightarrow C = A$ allora se dice che C è una *componente connessa*.

2.1.6 Teorema : La chiusura di un connesso è connessa.

Dimostrazione : Sia $Y \subset X$ connesso e considero $Z \subset \bar{Y}$ aperto, chiuso e non vuoto allora $Y \cap Z$ è ancora aperto e chiuso e per la connessione di Y si ha che $Y \cap Z = \{\emptyset, Y\}$ ma Z è non vuoto quindi $Z = Y$, ora $Z = Y$ è denso in $\bar{Y}$ quindi $\bar{Z} = (\bar{Y})$, ma Z è chiuso quindi $\bar{Z} = Z = \bar{Y}$ quindi la chiusura di Y è connessa.

□

2.1.13 osservazione : La parte interna di un chiuso connesso non è detto che sia connessa per esempio consideriamo due palle chiuse che ti toccano sono in punto, come in figura



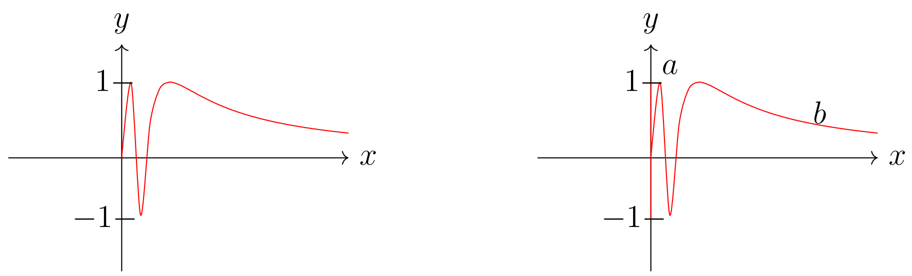
(Figura 21)

la parte interna sono le palle aperte e sono disgiunte quindi non può essere connessa la parte interna.

2.1.1 Corollario : Sia $Y \subset X$ connesso, allora per ogni W tale che $Y \subset W \subset \bar{Y} \Longrightarrow W$ connesso.

Dimostrazione : Prendo $Z \subset W$ aperto, chiuso e non vuoto allora $Y \cap Z$ è ancora aperto e chiuso e per la connessione di Y si ha che $Y \cap Z = \{\emptyset, Y\}$ ma Z è non vuoto quindi $Z = Y$, ora Z è denso in W quindi $W \subset \bar{Z} = Z$, dato che Z è chiuso, quindi $W = Z = Y$ quindi W è connesso. □

2.1.4 esempio : Consideriamo la funzione $sen(\frac{1}{x})$ come si vede dal grafico



(Figura 22)

questa è connessa e la sua chiusura, a destra nella figura 22, è ancora connessa, ma la chiusura non è connessa per archi infatti prendiamo un punto a sul grafico di $sen(\frac{1}{x})$ ed un punto b in $(0, 1)$, sempre grafico a destra nella figura 22, cediamo che non esiste una funzione continua che collega a con b, potremmo prendere la sezione di $sen(\frac{1}{x})$ ma questa estesa al segmento $[-1,1]$ in y, cioè alla sua chiusura, non è continua infatti il limite per x che va a 0 tutto il segmento $[-1,1]$, con questo ho mostrato un esempio di un connesso non connesso per archi. Osserviamo inoltre che il grafico di $sen(\frac{1}{x})$ più un qualsiasi punto di $[-1,1]$ è sempre connessa perchè giustificato dal corollario 2.1.1.

2.1.14 osservazione : Le componenti connesse sono chiuse, infatti sono connesse e sono contenute nella loro chiusura, ma la chiusura è ancora connessa quindi devono essere uguali alle loro chiusure, in conclusione sono chiuse. Inoltre sono aperte se per ogni punto è possibile provare un intorno tutto contenuto nel connesso.

2.1.7 Definizione : X si dice *localmente connesso* se per ogni $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni connesso.

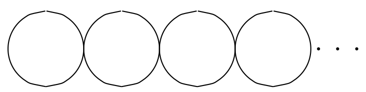
2.1.15 osservazione : In uno spazio localmente connesso le componenti connesse sono aperte.

2.1.4 proposizione : L'insieme $C(x) = \{\bigcup C_i \mid x \in C_i \text{ connesso}\}$ è connesso.

Dimostrazione : Prendo due connessi A, B con almeno un punto x in comune, l'unione è connessa infatti prendo $Z \in A \cup B$ aperto, chiuso e non vuoto, siccome A, B sono connessi allora $A, B \subset Z$ perchè $Z \neq \emptyset$, per connessione contiene almeno uno tra A, B, supponiamo A, ma in A c'è almeno un punto di B, quindi $Z \cap B \subset B$ aperto, chiuso e non vuoto di conseguenza $B \subset Z$ ed in conclusione $Z = A \cup B$. Ora itero il ragionamento per ogni $C_i \in C(x)$ è si ha la tesi. □

2.1.8 Definizione : L'insieme $C(x)$ definito prima è detto *componente connessa di x* e contiene x.

2.1.1 esercizio : Consideriamo una infinità numerabile di dischi aperti che si tangono sono in un punto ed in fila come in figura



(Figura 23)

vogliamo dimostrare che l'unione è connessa.

soluzione : Sappiamo che il disco aperto è connesso, se vogliamo usale l'induzione per risolvere il problema, sbagliamo, perchè l'induzione ti dice solo che vale solo per un numero finito, non dimostra che l'unione infinita sia connessa. (da vedere come finisco la dimostrazione ??)

2.1.15 osservazione : In $\mathbb{Q}$ le componenti connesse di un punto sono solo il punto stesso. Uno spazio dove per ogni $x \in X$ si ha che $C(x) = \{x\}$ si dice *totalmente sconnesso*.

2.1.16 osservazione : La retta si Sorgenfrey è totalmente sconnessa.

2.1.17 osservazione : Ogni funzione continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ è costante, $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, infatti $\mathbb{R}$ è connessa e una funzione continua manda connessi in connessi quindi l'immagine di un connesso di $\mathbb{R}$ deve essere un connesso di $\mathbb{Q}$ ma è totalmente sconnesso quindi ha immagine solo in un punto.

2.1.5 Proposizione : $\mathbb{Q}$ è totalmente sconnesso.

Dimostrazione : Questa proposizione è analoga a dire che tra due razionali cè un reale, è diverso da quello che avevamo fatto all'inizio del corso, infatti noi avevamo trovato che tra due reali c'è un razionale, e per dimostrare ciò ...(da vedere).

□

2.1.9 Definizione : Sia X uno spazio topologico e sia $U = (A_i)$ con A_i sottoinsiemi di X, allora si dice che U è un *ricoprimento di* X se e solo se $\bigcup A_i = X$, inoltre si dice che U è un *ricoprimento aperto/chiuso* se e solo se è un ricoprimento e ogni A_i sono aperti/chiusi.

2.1.10 Definizione : Un ricoprimento $U = (A_i)$ è detto *fondamentale* se Ω è aperto $\Longleftrightarrow \Omega \cap A_i$ è aperto in A_i, con la topologia indotta, per ogni i.

2.1.18 osservazione : $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua se e solo se $f|_{A_i}$ è continua per ogni i, dove gli A_i sono un ricoprimento.

2.1.19 osservazione : Un ricoprimento chiuso non è detto che sia fondamentale, invece un ricoprimento aperto e fondamentale.

2.1.11 Definizione : Un ricoprimento si dice *localmente finito* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno U di x che interseca un numero finito di C_i.

2.1.1 Lemma : Un ricoprimento localmente finito di chiusi è fondamentale.

Dimostrazione : (da vedere) Voglio vedere che $\Omega \in X$ è aperto se e solo se $\Omega \cap C_i$ è aperto in C_i per ogni i, dove gli C_i sono un ricoprimento finito.
$(\Longleftarrow)$: Sappiamo che per ogni i, $\Omega \cap C_i$ è aperto in C_i, allora $C_i/\Omega \cap C_i$ è chiusa in C_i quindi in X in quanto un C_i per la topologia di sottospazio è intersezione di un chiuso U_i di X con C_i ma essendo C_i chiuso di X allora $C_i/\Omega \cap C_i$ è intersezione di due chiusi di X quindi è un chiuso di X, osserviamo che, siccome C_i è ricoprimento finito $\bigcup C_i/\Omega \cap C_i = (\cup C_i)/(\cup \Omega \cap C_i) = X/\Omega$ è chiuso in X unione finita di chiusi quindi Ω è aperto.
$(\Longrightarrow)$: Prendo un ricoprimento di chiusi C_i localmente finito e prendo un aperto $\Omega \subset X$ allora $\Omega \cap C_i = \bigcup \omega \cap I(x)$ siccome C_i interseca un numero finito di intorni di un punto allora C_i è unione finita di intorni chiusi $I(x)$ in C_i quindi $\Omega \cap C_i$ è unione dei chiusi $\Omega \cap I(x)$ quindi ẁ chiusa in C_i. □

2.1.20 osservazione : La giunzione di due archi continui è un arco continuo (da vedere).

2.2 Proiezione stereografica e spazi proiettivi

Consideriamo S^1, so che $S^1/\{x\}$, dove x è un punto, è omeomorfo ad $\mathbb{R}$, infatti è come pensare di prendere la retta reale e di incollare i punti all'infinito, voglio vedere più in generale.

2.2.1 Proposizione : $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo a $S^n/\{punto\}$.

Dimostrazione : Prendo $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^n = \{x_0 = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, fisso ora un punto, per esempio $(1, 0, \cdots, 0)$, e considero l'applicazione $f : S^n/\{(1, 0, \cdots, 0)\} \longrightarrow \{x_0 = 0\} = \mathbb{R}^n$, questa applicazione prende il nome di proiezione stereografica come nell'esempio 2.1.3, in questo caso considero la retta passante per il punto $(1, 0, \cdots, 0)$ e associo al punto di intersezione tra la retta e S^n il punto di intersezione tra la retta e l'iperpiano come nella figura 18, così definita l'applicazione è biunivoca e continua, troviamo la formula esplicita. La retta è della forma $r = t(x_0 - 1, x_1, \cdots, x_n) + (1, 0, \cdots, 0)$, devo trovare le intersezioni, l'intersezione con l'iperpiano è data da $t = \frac{1}{1-x_0}$ infatti $t(x_0 - 1, x_1, \cdots, x_n) + (1, 0, \cdots, 0) = \frac{1}{1-x_0}(x_0 - 1, x_1, \cdots, x_n) + (1, 0, \cdots, 0) = (-1, \frac{x_1}{1-x_0}, \cdots, \frac{x_n}{1-x_0}) + (1, 0, \cdots, 0) = (0, \frac{x_1}{1-x_0}, \cdots, \frac{x_n}{1-x_0}) \in \{x_0 = 0\}$, quindi definisco $f((x_0, \cdots, x_n)) = (0, \frac{x_1}{1-x_0}, \cdots, \frac{x_n}{1-x_0})$, vedo che è omeomorfismo. Mi resta da verificare che l'applicazione inversa e continua, provo a scriverne la formula esplicita; sia $(x_0, \cdots, x_n) \in S^n$, per la struttura di S^n si ha che $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 = 1$, ora consideriamo l'espressione $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{(1-x_0)^2} + 1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x_0^2 - 2x_0 + 1}{(1-x_0)^2} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + 1 - 2x_0}{(1-x_0)^2} = \frac{2-2x_0}{(1-x_0)^2} = \frac{2}{1-x_0}$, ora l'immagine di f è $(0, \frac{x_1}{1-x_0}, \cdots, \frac{x_n}{1-x_0}) = (0, y_1, \cdots, y_n)$ quindi $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{(1-x_0)^2} + 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{(1-x_0)^2} + 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 + 1 = \frac{2}{1-x_0} \Longrightarrow$

$1-x_0=\frac{2}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2+1} \Longrightarrow x_0=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-1}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2+1}$, poi avevamo identificato $\frac{x_i}{1-x_0}=y_i \Longrightarrow x_i=y_i(1-x_0)$ e sostituendo quanto trovato prima si ottiene $x_i=\frac{2y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2+1}$ in conclusione si ha $g:\{x_0=0\}\longrightarrow S^n/\{(1,0,\cdots,0)\}$ con $g(y_1,\cdots,y_n)=(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-1}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2+1},\frac{2y_1}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2+1},\cdots,\frac{2y_n}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2+1})$ e così definita è continua. Se invece avessimo considerato come punto $(-1,0,\cdots,0)$ avremmo ottenuto $\bar{f}((x_0,\cdots,x_n))=(0,\frac{x_1}{1+x_0},\cdots,\frac{x_1}{1+x_0})$ e $\bar{g}((y_1,\cdots,y_n))=(1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2+1},\frac{2y_1}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2+1},\cdots,\frac{2y_n}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2+1})$.

□

Andiamo adesso negli spazi proiettivi, avevamo detto che $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})\cong S^2$, l'omeomorfismo era definito da $f([z_0,z_1])=(\frac{|z_0|^2-|z_1|^2}{|z_0|^2+|z_1|^2},\frac{\bar{z_0}z_1+z_0\bar{z_1}}{|z_0|^2+|z_1|^2},\frac{\bar{z_0}z_1-z_0\bar{z_1}}{|z_0|^2+|z_1|^2})$, l'applicazione così definita è ben definita ovvero per ogni $\lambda\neq 0$ vale che $f([\lambda z_0,\lambda z_0])=[z_0,z_1]$, cioè è costante sulle fibre, vediamo quindi che si tratta effettivamente di un omeomorfismo. Sappiamo che $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})=U_0\cup U_1$ dove $U_i=\{[z_0,z_1]\mid z_i\neq 0\}\cong\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$, l'isomorfismo con $\mathbb{C}$ è dato da $\gamma_i U_i\longrightarrow\mathbb{C}$ tale che $\gamma_0([z_0,z_1])=\frac{z_1}{z_0}$ e $\gamma_1([z_0,z_1])=\frac{z_0}{z_1}$.

2.2.1 osservazione : $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})=U_0\cup\{[0,1]\}=U_1\cup\{[1,0]\}$ infatti ad ognuno mancano le coppie dove si annulla z_i e queste determinano una retta che nel proiettivo si identificano come un punto.

Ora $f|_{U_0}([1,z_1])=(\frac{1-|z_1|^2}{1+|z_1|^2},\frac{2Re(z_1)}{1+|z_1|^2},\frac{-2Im(z_1)}{1+|z_1|^2})$ se consideriamo $z_1=x_1+iy_1$ si ha che $(\frac{1-|z_1|^2}{1+|z_1|^2},\frac{2Re(z_1)}{1+|z_1|^2},\frac{-2Im(z_1)}{1+|z_1|^2})=(\frac{1-x_1^2-y_1^2}{1+x_1^2+y_1^2},\frac{2x_1}{1+x_1^2+y_1^2},\frac{-2y_1}{1+x_1^2+y_1^2})=g_{(-1,0)}(x_1,-y_1)$ dove $g_{(-1,0)}$ è la funzione inversa della proiezione stereoscopica dove il polo è in $(-1,0)$ (in analogia nella proposizione precedente $\bar{f}$ sarebbe stata $f_{(-1,0,\cdots,0)}$) quindi $f|_{U_0}$ è omeomorfismo, analogamente $f|_{U_1}=(\frac{|z_1|^2-1}{1+|z_1|^2},\frac{2Re(z_1)}{1+|z_1|^2},\frac{2Im(z_1)}{1+|z_1|^2})=(\frac{x_1^2+y_1^2-1}{1+x_1^2+y_1^2},\frac{2x_1}{1+x_1^2+y_1^2},\frac{2y_1}{1+x_1^2+y_1^2})=g_{(1,0)}(x_1,y_1)$ che è la proiezione stereoscopica con il polo in $(1,0)$ quindi $f|_{U_1}$ è un omeomorfismo, siccome $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})=U_0\cup U_1$ allora f è bigettiva, per vedere che è effettivamente un omeomorfismo basta vedere che è aperta. Sia A un aperto $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ allora $f(A)=f(A\cap U_0)\cup f(A\cap U_1)=f|_{U_0}(A)\cup f|_{U_1}(A)$ siccome $f|_{U_i}$ sono omeomorfismi si ha che $f|_{U_i}(A)$ sono aperti quindi $f(A)$ è unione di aperti quindi è aperta e quindi f è una applicazione aperta e dunque un omeomorfismo.

2.2.2 osservazione : $p_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}^{n+1}/\{0\}\longrightarrow\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e $p_{\mathbb{C}}:\mathbb{C}^{n+1}/\{0\}\longrightarrow\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sono identificazioni aperte, infatti sono surgettive, facciamo $p_{\mathbb{C}}$ l'altro è analogo, inoltre sia $A\subset\mathbb{C}^{n+1}/\{0\}$

un aperto, considero $A' = \bigcup \lambda A$ dove $\lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{C}^{n+1}/\{0\}$. Se consideriamo $\gamma_\lambda : \mathbb{C}^{n+1}/\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}/\{0\}$ tale che $\gamma_{\{}\lambda\}(A) = \lambda A$, questo è un omeomorfismo quindi λA è aperto e quindi A' è unione di aperti quindi è aperto, inoltre è saturo quindi $p_{\mathbb{C}}(A')$ è un aperto (da vedere) ma $p_{\mathbb{C}}(A') = p_{\mathbb{C}}(A)$ quindi anche $p_{\mathbb{C}}(A)$ è aperto e perciò $p_{\mathbb{C}}$ è aperta.

2.2.3 osservazione : Siano X, Y spazi topologici e siano ρ_x, ρ_y relazioni di equivalenza definite rispettivamente su X e Y, definisco la relazione $\rho_x \cdot \rho_y$ su $X \times Y$ dove $(x, y)\rho_x \cdot \rho_y(x', y') \iff x\rho_x x',\ y\rho_y y'$, inoltre vale che $(X \times Y)/(\rho_x \cdot \rho_y) \cong (X/\rho_x) \times (Y/\rho_y) \iff X \longrightarrow X/\rho_x$ e $Y \longrightarrow Y/\rho_y$ sono identificazioni aperte, quindi in generale è falso l'omeomorfismo.

Abbiamo visto $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ come quoziente di $\mathbb{R}^{n+1}/\{0\}$ e anche come quoziente della sfera S^n, vediamo l'analogo complesso detta (da vedere) $fibrazioneon/off$, consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} S^{2n+1} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"] & \mathbb{C}^{n+1}/\{0\} \arrow[d, "p"] \\ & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Studio π, è surgettiva infatti p è surgettiva e per ogni $z \in \mathbb{C}^{n+1}\{0\}$ si ha che $p(z) = p(\frac{z}{||z||})$ e $\frac{z}{||z||} \in S^{2n+1}$, inoltre le fibre di π sono tutte omeomorfe a S^1 infatti se $z, z' \in S^{sn+1}$ allora $\pi(z) = \pi(z') \iff z' = \lambda z$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}/\{0\}$ inoltre $||z'|| = ||z|| = 1 \implies |\lambda| = 1$, ora consideriamo le fibre $\pi^{-1}([z]) = \{\lambda z \mid \lambda \in \mathbb{C}/\{0\},\ |\lambda| = 1\}$, voglio vedere che omeomorfo ad S^1. Consideriamo per ogni $v \in \mathbb{C}^{n+1}/\{0\}$ ápplicazione $\phi_v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ tale che $\phi_v(\lambda) = \lambda v$, ora $\pi^{-1}([z]) = \{\lambda z \mid \lambda \in \mathbb{C}/\{0\},\ |\lambda| = 1\} = \phi_z(\{\lambda \in \mathbb{C}/\{0\} \ : \ |\lambda| = 1\}) = \phi_z(S^1) \cong S^1$. Ora vediamo che π è aperta per concludere che è una identificazione; Siano $U_i \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, dove $U_i = \{[z_0, \cdots, z_n] \mid z_i \neq 0\}$ e sappiamo che vale $\bigcup U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, vedo che esiste un omeomorfismo Φ_i che fa commutare il diagramma seguente, infatti se esistesse una tale applicazione

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, leftrightarrow, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"] & U_i \times S^1 \arrow[d, "\pi_i"] \\ & U_i \end{tikzcd}$$

si avrebbe che $\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}$ è aperta infatti $\pi|_{\pi^{-1}(U_i)} = (\Phi_i \circ \pi_i)|_{\pi^{-1}(U_i)}$ e Φ_i, π_i sono aperte dato che la prima è omeomorfismo e la seconda è una proiezione sulla prima componente, quindi siccome gli U_i ricoprono $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si ha che $\pi^{-1}(U_i)$ ricoprono S^{2n+1} allora per ogni aperto A di S^{2n+1} si ha che $\pi(A) = \bigcup \pi(A \cap \pi^{-1}(U_i))$ unione di aperti è aperto quindi $\pi(A)$ aperto e si ha la tesi. Mostriamo che esiste questa Φ_i, dico che $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times S^1$ tale che $\Phi_i(z) = ([z], \frac{z_i}{|z_i|})$, così definita è continua inoltre considero $\Psi_i : U_i \times S^1 \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ tale che $\Psi_i([z], \lambda) = \lambda \frac{|z_1|z}{z_i||z||}$, Ψ_i è ben definita e continua infatti $\Psi_i([\mu z], \lambda) = \lambda \frac{|\mu||z_i|\mu z}{\mu z_i|\mu|||z||} = \lambda \frac{|z_1|z}{z_i||z||}$ è costante sulle fibre, osserviamo che sono una l'inversa dell'altra infatti sia $z \in S^{2n+1}$ quindi $||z|| = 1$, allora $z \xrightarrow{\Phi_i} ([z], \frac{z_i}{|z_i|}) \xrightarrow{\Psi_i} (\frac{z_i}{|z_i|})\frac{|z_i|z}{z_i||z||} = z$ e $([z], \lambda) \xrightarrow{\Psi_i} \lambda\frac{|z_i|z}{z_i||z||} \xrightarrow{\Phi_i} ([\frac{\lambda|z_i|}{z_i||z||}z], [\frac{\lambda|z_i|}{z_i||z||}z]_i) = ([z], \frac{\lambda|z_i|}{z_i||z_i||}z_i) = ([z], \lambda)$, $[\frac{\lambda|z_i|}{z_i||z||}z] = [z]$ banalmente perché $\mu = \frac{\lambda|z_i|}{z_i||z||} \in \mathbb{C}/\{0\}$ quindi $\mu z \sim z$ e quini sono nella stessa classe di equivalenza. Verifichiamo solo che effettivamente Ψ_i è continua; sia $\tilde{U}_i = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_i \neq 0\}$ allora $U_i \times S^1 = \tilde{U}_i/\sim_1 \times S^1/\sim_2$ dove $\sim_1$ e la relazione che identifica $\mathbb{C}^{n+1}/\{0\}$ ad S^{2n+1} e $\sim_2$ è la relazione di uguaglianza ovvero $S^1/\sim_2 = S^1$, quindi siccome $\tilde{U}_i \longrightarrow U_i$ e $S^1 \longrightarrow S^1$ sono identificazioni aperte vale che $\tilde{U}_i/\sim_1 \times S^1/\sim_2 \cong (\tilde{U}_i/\times S^1)/\sim_1 \cdot \sim_2 = (\tilde{U}_i/\times S^1)/\sim$ quindi commuta il diagramma quà sotto e perciò Ψ_i é continua quindi in conclusione esiste Φ_i

$$\begin{tikzcd}
\tilde{U}_i \times S^1 \arrow[r, "continua"] \arrow[dr, "\pi"'] & \pi^{-1}(U_i) \\
& (\tilde{U}_i \times S^1)/\sim \arrow[u, "\Psi_i"]
\end{tikzcd}$$

omeomorfismo e si ha la tesi.

2.2.1 esercizio : Consideriamo $\mathbb{C}/\{0\}$ è la relazione di equivalenza $\sim$ tale che $z \sim z' \iff z' = 2^n z$ per qualche $n \in \mathbb{Z}$, dimostrare che $X = (\mathbb{C}/\{0\})/\sim \cong s^{2m-1} \times s^1$, X è detta *varietà di Hopf*.

soluzione : Consideriamo l'omeomorfismo $\gamma : S^{2m-1} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}^m/\{0\}$ la relazione $\sim$ su $\mathbb{C}^m/\{0\}$ è equivalente alla relazione $= \cdot \sim_1$ su $S^{2m-1} \times \mathbb{R}_+$ dove $(x, y) = \cdot \sim_1 (x', y') \iff x = x'\, y' = 2^n y$ per qualche $n \in \mathbb{Z}$ siccome $S^{2m-1} \longrightarrow S^{2m-1}/=$ e $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+/\sim_1$ sono identificazioni allora $X = (\mathbb{C}/\{0\})/\sim \cong (S^{2m-1} \times \mathbb{R}_+)/= \cdot \sim_1 \cong S^{2m-1}/= \times \mathbb{R}_+/\sim_1 \cong S^{2m-1} \times \mathbb{R}_+/\sim_1$ quindi resta solo da verificare che $\mathbb{R}_+/\sim_1 \cong S^1$. Ora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_+$ esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $2^n < \lambda \leq 2^{n+1}$ allora $\lambda \sim_1 \frac{\lambda}{2^{n+1}} \in (\frac{1}{2}, 1)$ quindi tutte le classi distinte sono in $(\frac{1}{2}, 1)$ inoltre $1 \sim \frac{1}{2}$ quindi gli estremi di questo segmento si identificano in un punto e si chiude a formare S^1.

2.2.2 esercizio : Siano X_1, X_2 spazi topologici e consideriamo le relazioni di equivalenza $\sim_1, \sim_2$ tale che $p_1 : X_1 \longrightarrow X_1/\sim_1 = Z_1$ e $p_2 : X_2 \longrightarrow X_2/\sim_2 = Z_2$ sono identificazioni aperte, inoltre consideriamo la relazione di equivalenza $\sim$ su $X_1 \times X_2$ tale che $(x_1, x_2) \sim (x_1', x_2') \iff x_1 \sim_1 x_1'$ e $x_2 \sim_2 x_2'$. Allora $(X_1 \times X_2)/\sim \cong Z_1 \times Z_2$.

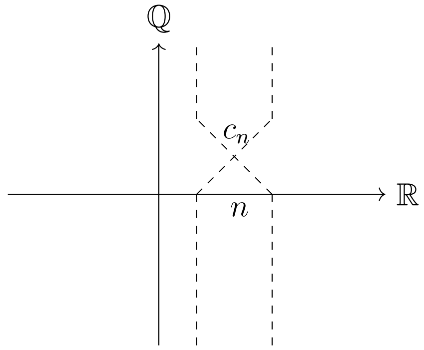
soluzione : La tesi si ha se dimostriamo che $p_1 \circ p_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Z_1 \times Z_2$ è una identificazione aperta. Ovviamente è surgettiva, ora sia $A \subset X_1 \times X_2$ un aperto, per la topologia prodotto $A = \bigcup U_i \times V_i$ unione di aperti rispettivamente di X_1 e X_2, quindi $p_1 \circ p_2(A) = p_1 \circ p_2(\bigcup U_i \times V_i) = \bigcup p_1 \circ p_2(U_i \times V_i) = \bigcup p_1(U_i) \times p_2(V_i)$, siccome p_1, p_2 sono aperte, allora $p_1(U_i), p_2(V_i)$ sono aperti e quindi per la topologia prodotto $p_1(U_i) \times p_2(V_i)$ è aperto perciò $p_1 \circ p_2$ è aperta.

2.2.1 esempio : Le classi di equivalenza di $\sim$ dell'esercizio precedente, coincidono con le fibre di $p_1 \circ p_2$ infatti dal diagramma si ha che q omeomorfismo se e solo se $p_1 \circ p_2$ è identificazione.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times X_2 \arrow[rr, "p_1 \circ p_2"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (X_1/\sim_1) \times (X_2/\sim_2) \\
& (X_1 \times X_2)/\sim \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

In generale il prodotto di quozienti non è un quoziente.

2.2.2 esempio : (da vedere)Sia $X_1 = \mathbb{R}$ e $X_2 = \mathbb{Q}$, consideriamo $\sim_1$ in $\mathbb{R}$ tale che $x \sim_1 y \iff x = y$ o $x, y \in \mathbb{Z}_+$ e chiamo $\mathbb{R}/\sim = Z$, e considero $\sim_2$ in $\mathbb{Q}$ tale che $x \sim_2 y \iff x = y$ in sostanza $\mathbb{Q}/\sim_2 = \mathbb{Q}$, mostro che $p : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \longrightarrow Z \times \mathbb{Q}$ non è una identificazione. Mi basta trovare un aperto saturo $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ tale che $p(U)$ non è aperto; per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$ considero $c_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ e le rette r_1, r_2 passanti per c_n e di pendenza ± 1, consideriamo la porzione di piano che è maggiore e minore di entrambe le rette r_1, r_2 e limitata da dalle rette $x = n \pm 4$ e definiamo U_n come la parte interna di questo insieme come in figura :



(Figura 24)

$\{n\} \times \mathbb{Q} \subset U_n$ e $c_n \notin \mathbb{Q}$, poniamo ora $U = \bigcup U_n$, U così definito è saturo in quanto $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Q} \subset U$, ora mostro che $p(U)$ non è aperto. Supponiamo che lo sia, in particolare si ha che $p(U) \supset p((1, 0)) = ([1], 0)$, siccome $p(U)$ è aperto esistono $W \in Z$ aperto e $\delta > 0$ con $I_\delta \subset \mathbb{Q}$ aperto tale che $([1], 0) \in W \times I_\delta \subset p(U)$ e quindi $W \times I_\delta$ è intorno di $([1], 0)$, ora consideriamo la proiezione $q : \mathbb{R} \longrightarrow Z$ allora $q^{-1}(Z) \subset \mathbb{R}$ è aperto ed è intorno di $\mathbb{Z}_+$ quindi per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$ esiste $\epsilon_n > 0$ tale che $I_{\epsilon_n} = (n - \epsilon_n, n + \epsilon_n) \subset q^{-1}(W)$ tale che $I_{\epsilon_n} \times I_\delta \subset U$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$ ma questo non è possibile perchè quando n cresce c_n tende a 0 ma siccome $c_n \notin U$ non può esistere un ϵ tale che $(-\epsilon, \epsilon) \subset q^{-1}(W)$ perchè $0 \notin U$.

2.3 Hausdorff e connessione

Ricordiamo che uno spazio di Hausdorff o T_2 è uno spazio topologico dove ogni coppia di punti ammettono intorni disgiunti.

2.3.1 Proposizione :

1) X di Hausdorff $\Longrightarrow$ i punti sono chiusi.

2) X spazio metrico $\Longrightarrow$ X di Hausdorff.

3) X di Hausdorff $\Longleftrightarrow$ la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ è chiusa.

2.3.1 Corollario :

1) $f : X \longrightarrow Y$ continua e Y di Hausdorff allora $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ è chiuso.

2) $f, g : X \longrightarrow Y$ con Y di Hausdorff allora $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è chiuso, in particolare se X è di Hausdorff allora sia $f : X \longrightarrow X$ si ha che $\{x \in X \mid x = f(x)\}$ è chiuso.

Dimostrazione :

1) Sia $\psi : X \times Y \longrightarrow Y \times Y$ tale che $\psi(x, y) = (f(x), y)$ è continua perchè continua sulle singole componenti, ora la diagonale di $Y \times Y$ è $\Delta = \{(y, y) \mid y \in Y\}$, siccome Y di Hausdorff, Δ è chiusa inoltre per la continuità di ψ si ha che $\psi^{-1}(\Delta) = \{(f(x), y) \mid y = f(x)\} = \Gamma$ è chiusa.

2) Analogamente a prima, consideriamo $\psi : X \longrightarrow Y \times Y$ continua tale che $\psi(x) = (f(x), g(x))$ allora $\psi^{-1}(\Delta) = \{x \in X \mid g(x) = f(x)\}$ è chiuso per la continuità di ψ e del fatto che la diagonale Δ è chiusa in quanto Y di Hausdorff.

□

2.3.1 esempio : $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue tali che $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$ allora $f = g$, in generale $f, g : X \longrightarrow Y$ continue con Y di Hausdorff e sia $Z \subset X$ denso tale che $f|_Z = g|_Z$ allora $f = g$ infatti per il corollario precedente l'insieme dei punti dove coincidono le funzioni è chiuso quindi Z è contenuto in un insieme chiuso quindi anche la chiusura di Z è contenuta, ma Z è denso e quindi la sua chiusura è tutto X quindi i punti in cui coincidono sono tutto X quindi coincidono $f = g$.

2.3.2 Proposizione :

1) Prodotto di Hausdorff è di Hausdorff.

2) Sottospazio di un Hausdorff è di Hausdorff.

Dimostrazione :

1) Siano X, Y di Hausdorff, considero i punti distinti $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ allora esistono $U, U' \subset X$ aperti disgiunti rispettivamente di x e x' e $V, V' \subset Y$ aperti disgiunti rispettivamente di y e y', allora $U \times V$ e $U' \times V'$ sono intorni disgiunti rispettivamente di (x, y) e (x', y').

2) Sia X di Hausdorff e sia $Z \subset X$ sottospazio, siano $z_1, z_2 \in Z$ allora esistono $U_1, U_2 \subset X$ intorni disgiunti rispettivamente di z_1, z_2 allora $U_1 \cap Z$ e $U_2 \cap Z$ sono intorni disgiunti rispettivamente di z_1, z_2 in Z.

$\square$

2.3.2 esempio : Consideriamo la *retta di Sorgenfrey* ovvero $\mathbb{R}$ con la topologia $\mathbb{R}_s$ generata dagli intervalli $[a, b)$ con $a < b$, questa topologia è più fine di quella euclidea infatti $(a, b) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} [a + \frac{1}{n}, b)$.

2.3.1 osservazione : $\mathbb{R}_s$ è di Hausdorff perchè contiene $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea che è di Hausdorff.

2.3.1 Definizione : Sia X uno spazio topologico, si dice *totalmente sconnesso* $\iff$ le componenti connesse sono punti, per esempio come abbiamo già visto $\mathbb{Q}$ con la topologia euclidea.

2.3.2 osservazione : $\mathbb{R}_s$ è totalmente sconnesso infatti osservo che per ogni $a < c < b$ si ha che $[a, b) = [a, c) \cup [c, b)$ che è una unione di due aperti disgiunti quindi $[a, b)$ non è connesso, si può dire che $[a, b)$ è aperto e chiuso infatti $[a, b) = \mathbb{R}/((-\infty, a) \cap (b, \infty))$ e $(-\infty, a) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} [-n, a)$ e $(b, \infty) = \bigcup\limits_{b < n \in \mathbb{Z}_+} [b, n)$ quindi $[a, b)$ è chiuso. Ora sia $x \in \mathbb{R}$ e consideriamo $C(x) \subset \mathbb{R}$ la sua componente connessa, $C(x) \subset (-\infty, x) \cup [x, \infty)$, $(-\infty, x), [x, \infty)$ questi per quanto detto prima sono sia aperti che chiusi, siccome $x \in C(x)$ e $C(x)$ connesso si ha che $c(x) \subset [x, \infty)$ ma $[x, \infty) = [x, x + \frac{1}{n}) \cap [x + \frac{1}{n}, \infty)$ per ogni n e per quanto detto prima deve essere che per ogni n, $C(x) \subset [x, x + \frac{1}{n})$ quindi $c(x) \subset \bigcap [x, x + \frac{1}{n}) = x$.

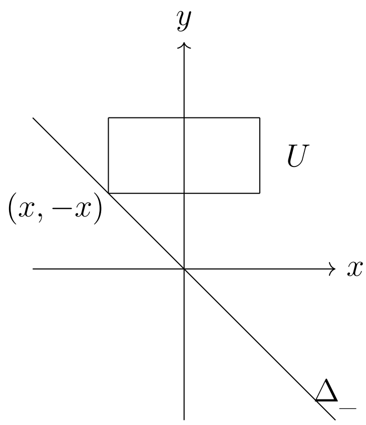
2.3.3 esempio : Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ continua allora f è costante infatti $\mathbb{R}$ è connesso e per continuità $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$ è connesso, ma $\mathbb{Q}$ è totalmente sconnesso quindi $f(\mathbb{R}) = a$. Analogamente $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_s$ continua è costante.

Definiamo *piano di Sorgenfrey* lo spazio $\mathbb{R}_s^2 = \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ che è di Hausdorff.

2.3.3 Proposizione : Uno spazio metrizzabile, ovvero che è possibile definirci una metrica, è di Hausdorff, ma non è sempre vero che uno spazio di Hausdorff sia metrizzabile.

2.3.4 Proposizione : Sia $\Delta\_ = \{(x, -x) \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}_s$ l'antidiagonale, allora $\Delta\_$ ha la topologia discreta.

Dimostrazione : Devo verificare che i punti sono aperti quindi, per la topologia di sottospazio, devo trovare un aperto $U \subset \mathbb{R}_s^2$ tale che $U \cap \Delta\_ = (x, -x)$, allora consideriamo $U = [x, 1) \times [x, 1)$ questo verifica la tesi come si vede in figura



(Figura 25)

osserviamo che $\mathbb{R}_s^2$ ha un sottospazio discreto con la cardinalità del continuo.

2.3.2 Definizione : Sia X spazio topologico si dice *separabile* se esiste $Z \subset X$ denso e numerabile.

2.3.4 esempio : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}_s$ sono separabili, in particolare l'ultimo perchè $[a, b) \cap \mathbb{Q}_s \neq \emptyset$.

2.3.5 Proposizione : Sia X spazio metrico separabile e $Y \subset X$ allora Y è separabile.

Dimostrazione : Sia $Z \subset X$ denso e numerabile, cerco $Y_Z \subset Y$ denso e numerabile. Sia $I = \{(z, r) \in Z \times \mathbb{Q} \mid B(z, r) \cap Y \neq \emptyset\}$, è numerabile, ora per ogni (z, r) scelgo un $y_{z,r} \in B(z, r) \cap Y$ e definisco $Y_Z = \{y_{z,r}\}$, è numerabile, voglio vedere che è denso. Sia $y \in Y$ e $\epsilon > 0$, $Z \subset X$ è denso quindi esiste $z \in Z \cap B(y, \frac{\epsilon}{2}) \implies y \in B(z, \frac{\epsilon}{2}) \implies$ esiste $r \in \mathbb{Q}$, $r' \leq \frac{\epsilon}{2}$ tale che $y \in B(z,r') \implies (z,r') \in I$ quindi $y_{z,r} \in B(z,\frac{\epsilon}{2}) \cap Y_Z \implies d(y,y_{z,r}) \leq d(y,z) + d(z,y_{z,r}) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ quindi sono arbitrariamente vicini perciò Y_Z è denso in Y.

$\square$

2.3.2 Corollario : $\mathbb{R}_s$ non è metrizzabile.

Dimostrazione : $\mathbb{R}_s^2$ è separabile perchè $\mathbb{Q}_s^2$ è denso e numerabile, quindi per la proposizione precedente ogni suo sottospazio è numerabile ma $\Delta\_$ è un suo sottospazio e non è separabile infatti se lo fosse avrebbe un sottospazio denso e numerabile $Z \subset \Delta\_$ ma siccome è denso interseca ogni aperto, ma in $\Delta\_$ ogni punto è aperto quindi $Z = \Delta\_$ ma $Delta\_$ non è numerabile assurdo, quindi $\mathbb{R}_s^2$ non è metrizzabile.

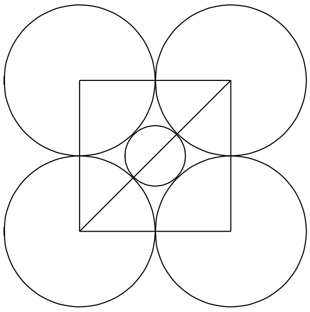
2.3.3 osservazione : $\mathbb{R}_s^2$ è di Hausdorff ma non è metrizzabile.

2.4 Compattezza

2.4.1 Definizione : Sia X uno spazio topologico, si dice *compatto* $\iff$ per ogni ricoprimento aperto di X esiste un sotto ricoprimento finito di X, un sotto ricoprimento di un ricoprimento (A_i) di X è un ricoprimento di X composto da alcuni aperti $A_j \in (A_i)$.

2.4.1 osservazione : $\mathbb{R}^n$ non è compatto infatti se prendiamo il ricoprimento formato dalle palle aperte centrate nell'origine con raggio crescente, non esiste un sotto ricoprimento finito che ricopra tutto $\mathbb{R}^n$.

2.4.2 osservazione : Consideriamo la figura composta da un quadrato di lato 1 con ai vertici 4 circonferenze di lato $\frac{1}{2}$, voglio sapere quanto vale la diagonale del cerchio centrale tangente alle 4 circonferenze sui vertici, con un breve conto si ottiene $\sqrt{2} - 1$.



(Figura 26)

si può analogamente fare lo stesso problema su un cubo e trovare che la circonferenza interna ha un diametro pari $\sqrt{n}-1$, in $\mathbb{R}^n$ si ha che la diagonale misura $\sqrt{n}-1$, questo ci dice che una sfera di raggio 1 rimane sostanzialmente la stessa in $\mathbb{R}^n$ invece un cubo di lato tende ad allargarsi sempre pì al crescere di n e questa è sostanzialmente la differenza metrica tra il cubo e la sfera. Questo problema mostra che il cubo in $\mathbb{R}^n$ lo posso ricoprire con un numero finito di palle aperte quindi è compatto.

2.4.1 Teorema : Sia X compatto e $f : X \longrightarrow Y$ continua e surgettiva, allora $f(Y)$ è compatto.

Dimostrazione : Prendo $U = (A_i)$ ricoprimento aperto di Y, per la continuità di f gli $f^{-1}(A_i)$ sono aperti e quindi $(f^{-1}(A_i))$ sonoun ricoprimento di X ma essendo compatto esiste un sotto ricoprimento finito quindi esistono un numero finito di indici per cui $f^{-1}(A_i)$ ricoprono X e quindi gli A_i corrispondenti sono in numero finito e ricoprono Y per la surgettività di f.

$\square$

2.4.1 Proposizione : Un chiuso contenuto in un compatto è compatto.

Dimostrazione : Sia $Y \subset X$ chiuso, consideriamo $U = (A_i)$ un ricoprimento aperto di Y, siccome Y è chiuso allora X/Y è aperto quindi $(A_i) \cup (X/Y)$ è un ricoprimento aperto di X, ma X compatto quindi esiste un sotto ricoprimento finito di X in particolare ci saranno un numero finito di A_i tale che $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup (X/Y)$ quindi $A_1 \cup \cdots \cup A_n = Y$ e sono un sotto ricoprimento finito di Y, quindi Y è compatto.

$\square$

2.4.2 Teorema : Prodotti di compatto è compatto.

Dimostrazione : Siano X, Y compatti e consideriamo un ricoprimento aperto di $X \times Y$, consideriamo inoltre le fibre $\{x\} \times Y$, queste sono compatte perché omeomorfe a Y allora per ogni fibra e per ogni ricoprimento aperto, ricoprimento che è parte del ricoprimento di $X \times Y$, delle fibre esiste un sotto ricoprimento finto per ogni fibra, chiamiamo $(A_i)_x$ ogni ricoprimento finito delle fibre $\{x\} \times Y$, ora consideriamo la proiezione p su X, siccome la proiezione è aperta, allora $(p((A_i)_x))$ è un ricoprimento aperto di X, ma X 'e compatto quindi esisto un numero finito di x tale che $p((A_i)_x)$ ricopre X, chiamiamo questi Ω_{ij} sono in numero finito e $p^{-1}(\Omega_{ij})$ ricoprono $X \times Y$ e ogni preimmagine per quanto detto prima è composta da un numero finito di aperti, ma le preimmagini sono finite quindi ho trovato un sotto ricoprimento finito di $X \times Y$ e quindi è compatto.(se non volessi considerare che p è aperta allora consideriamo i rettangolini sulle fibre e poi boh... controlla Kosnyosky o come si scrive)

$\square$

2.4.3 Teorema : $[0, 1]$ è compatto.

Dimostrazione : Consideriamo un ricoprimento aperto $U = (A_i)$ e sia $X = \{t \mid [0, t]$ lo posso ricoprire con un numero finito di $A_i\}$, è non vuoto e limitato e considero il suo *sup* e lo chiamo b, se $b > 1$ allora $[0, 1]$ è compatto, se invece $b < 1$ per la definizione di *sup* si ha che esiste un ϵ tale che $[0, b - \epsilon]$ si può ricoprire con un numero finito di A_i, ma tra gli A_i che contengono b ne trovo almeno uno che contiene $b - \epsilon$, lo chiamo B allora gli A_i che ricoprono $[0, b - \epsilon]$ ci unisco B rimane sempre un numero finito di aperti ma ricoprono $[0, b]$ assurdo quindi $b > 1$ e si ha la tesi.

$\square$

2.4.4 Teorema : I compatti di $\mathbb{R}^n$ sono chiusi e limitati.

Dimostrazione : Sia A un compatto, siccome $\mathbb{R}^n$ è T_2 allora è chiuso, e siccome è compatto può essere ricoperto da un numero finito di aperti quindi è limitato, consideriamo ora B chiuso e limitato, siccome è limitato esiste un cubo che lo contene, e il cubo è compatto, siccome B è chiuso ed è contenuto in un compatto allora è anch'esso compatto.

$\square$

2.4.5 Teorema : (Di Weierstrass) Sia K un compatto e $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ continua (al posto di $\mathbb{R}$ è sufficiente un corpo ordinato). Allora esistono *max* e *min*.

Dimostrazione : K compatto e f continua allora $f(K)$ è compatto in $\mathbb{R}$ quindi è chiuso e limitato e quindi esistono *max* e *min*.

$\square$

2.4.3 osservazione : Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto infatti la sfera S^n è chiusa e limitata in quanto se considero l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f((a_1, \cdots, a_n)) = a_1^2 + \cdots + a_n^2$

è continua inoltre 1 è chiuso in $\mathbb{R}$ e $S^n = f^{-1}$ quindi è chiusa ed è limitata, ora $S^n \subset \mathbb{R}^n$ quindi è compatta, inoltre si ha che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\sim$ il quoziente è un'applicazione continua quindi manda compatti in compatti e perciò lo spazio proiettivo è compatto.

2.4.4 osservazione : Sia $f : X \longrightarrow Y$ biunivoca con X compatto e Y è T_2 allora f è un omeomorfismo infatti sia K un chiuso di X, siccome X é compatto allora anche K è compatto e per la continuità di f si ha $f(K)$ è compatto in Y, ma Y è T_2 quindi $f(K)$ è chiuso, in conclusione f è una applicazione chiusa e per ipotesi bigettiva quindi è un omeomorfismo.

2.4.2 Proposizione : In un T_2 un insieme compatto è chiuso.

Dimostrazione : Consideriamo X di Hausdorff e $K \subset X$ compatto, dimostriamo che X/K è aperto, ovvero che è intorno di ogni suo punto, sia quindi $y \in X/K$ e $x \in K$, siccome X è T_2 allora esistono $U_x, V_x \subset X$ intorni disgiunti tale che $x \in U_x$ e $y \in V_x$, ora per ogni $x \in K$ posso considerare un ricoprimento aperto di K composto dagli intorni U_x disgiunti da intorni V_x di ogni $y \in X/K$, siccome K è compatto posso estrarre un sotto ricoprimento finito, ovvero esistono $x_1, \cdots, x_n \in K$ tale che $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$, ma allora $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i} = V$ è aperto e disgiunto da K e $y \in V$ quindi ho trovato un intorno di y tutto contenuto in X/K quindi è aperto e perciò K è chiuso.

$\square$

2.4.1 Corollario : Sia X compatto, Y è T_2 e $f : X \longrightarrow Y$ continua allora f è chiusa.

Dimostrazione : Sia $C \subset X$ chiuso allora C compatto perch'e X compatto, f continua allora $f(C)$ compatto ma Y T_2 allora $f(C)$ chiuso.

$\square$

2.4.2 Corollario : Sia X compatto, Y è T_2 e $f : X \longrightarrow Y$ continua e surgettiva allora f è una identificazione chiuso, se al posto di surgettiva c'è bigettiva allora f è omeomorfismo.

2.4.1 esercizio :

1) Consideriamo i gruppi $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid MM^T = I\}$, $U_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid MM^H = I\}$, $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid det(M) = 1\}$, $SU_n(\mathbb{C}) = \{M \in U_n(\mathbb{C}) \mid det(M) = 1\}$, voglio vedere che questi sono compatti con la topologia indotta rispettivamente da $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ che hanno la topologia prodotto.

soluzione : Osserviamo che se $O_n(\mathbb{R})$ è compatto allora $SO_n(\mathbb{R})$ è compatto infatti se consideriamo l'applicazione $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(A) = det(A)$, è continua e $SO_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(1)$ siccome $\{1\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ e f è continua allora $SO_n(\mathbb{R})$ è chiuso, ma $SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$ quindi se $O_n(\mathbb{R})$ è compatto, chiso in compatto è compatto, quindi $SO_n(\mathbb{R})$ è compatto. Del tutto analogo $SU_n(\mathbb{C})$, quindi ci riduciamo a studiare solo $O_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$, inoltre la dimostrazione di uno è analoga a quell'altro quindi ci è sufficiente mostrare che $O_n(\mathbb{R})$ è compatto. $O_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ed i compatti di $\mathbb{R}^{n^2}$ sono chiusi e limitati, quindi mostriamo che $O_n(\mathbb{R})$ è chiuso e limitato. Consideriamo $F : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ tale che $F(A) = AA^T$, questa applicazione è continua e si ha che $O_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(I)$ siccome $\{I\}$ è chiuso allora $O_n(\mathbb{R})$ è chiuso. Ora per ogni $A \in O_n(\mathbb{R})$ se a_{ij} sono i coefficienti di A allora vale che $\sum a_{ij}^2 = n$ infatti $AA^T = I$ quindi $(a_{i1}, \cdots a_{in})^T \cdot (a_{i1}, \cdots a_{in}) = a_{i1}^2 + \cdots + a_{in} = 1$ per ogni i quindi sommando tutto si ha la somma precedente, osserviamo che $\sum a_{ij}^2 = n$ è l'equazione della superficie di una sfera di raggio $\sqrt{n}$ ed in particolare è limitata, quindi $O_n(\mathbb{R})$ vive sulla superficie di una sfera che è limitata quindi si ha che $O_n(\mathbb{R})$ è compatto.

2) Consideriamo i gruppi $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(M) \neq 0\}$, $GL_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid det(M) \neq 0\}$, $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(M) = 1\}$, $SL_n(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid det(M) = 1\}$ con la topologia indotta rispettivamente da $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$ non sono compatti.

soluzione : Se lo fossero sarebbero chiusi e limitati, osserviamo che $GL_n(\mathbb{R})$ e $GL_n(\mathbb{C})$ sono aperti infatti $M_n(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(A) = 0\} = det^{-1}(0)$ ma $det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua e 0 è chiuso in $\mathbb{R}$ quindi $M_n(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{R})$ è chiuso perciò $GL_n(\mathbb{R})$ è aperto, analogo $GL_n(\mathbb{C})$. Invece $SL_n(\mathbb{R})$ non è limitato infatti posso considerare le matrici con tutti 0 meno che nella diagonale e invece nella diagonale composta da $n-2$ termini di 1 e gli ultimi due porci a e a^{-1} per ogni $a \in \mathbb{R}$, quindi il determinate e 1, e si ha che $\sum a_{ij}^2 = n - 1 + 2a^2$ quindi queste matrici vivono nella superficie di una sfera di raggio $\sqrt{n + 2 + 2a^2}$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ quindi non è limitato, analogo $SL_n(\mathbb{C})$.

2.4.3 Proposizione : Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua con Y connesso e le fibre $f^{-1}(y)$ connesse per ogni $y \in Y$ e supponiamo che f sia aperta/chiusa allora X è connesso.

Dimostrazione : Supponiamo f chiusa, con f aperta è analogo, supponiamo per assurdo che $X = C_1 \cup C_2$ unione di due chiusi non vuoti e disgiunti, allora $Y = f(C_1) \cup f(C_2)$, siccome f è chiusa, allora Y è unione di due chiusi non vuoti, ma siccome Y è connesso $f(C_1) \cap f(C_2) \neq \emptyset$, consideriamo quindi un y dell'intersezione, alora la fibra $f^{-1}(y) = (f^{-1(y) \cap C_1}) \cup (f^{-1(y) \cap C_2})$ è unione di due chiusi non vuoti e disgiunti, assurdo perché la figra è connessa.

□

2.4.3 Corollario : Il prodotto di due connessi e connesso.

Dimostrazione : Siano X, Yconnessi e sia $f : X \times Y \longrightarrow Y$, questa è una proiezione quindi è una applicazione aperta, Y è connesso e le fibre sono $f^{-1}(y) = X \times \{y\} \cong X$ che sono quindi tutte connesse per per la proposizione precedente si ha che $X \times Y$ è connesso. Potevo anche studiare $f : X \times Y \longrightarrow X$, avrei ottenuto comunque la tesi.

$\square$

2.4.2 esercizio :

1) $GL_n(\mathbb{R})$ non è connesso e ha due componenti connesse.

soluzione : Sia $GL_n(\mathbb{R})^+ = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid det(A) > 0\}$, dico che $GL_n(\mathbb{R})^+$ è connesso. Procediamo per induzione, se $n = 1 \Longrightarrow GL_1(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ che è connesso, consideriamo ora $n > 1$ e sia $p : GL_n(\mathbb{R})^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $p(A) =$ Prima colonna di A, che è la restrizione di $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $f(A) =$ Prima colonna di A, osserviamo che $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^n \underbrace{\times \cdots \times}_{n\ volte} \mathbb{R}^n$ con la topologia prodotto, ciò mostra che f è la proiezione sulla prima componente del prodotto quindi, in quanto proiezione, è una applicazione aperta, e quindi anche p è aperta perché $GL_n(\mathbb{R})^+$ è aperto in $M_n(\mathbb{R})$ e se prendo un aperto $A \subset GL_n(\mathbb{R})^+$, per la topologia di sottospazio, esiste un aperto $U \subset M_n(\mathbb{R})$ tale che $A = U \cap GL_n(\mathbb{R})^+$, quindi $p(A) = f(U \cap GL_n(\mathbb{R})^+)$ quindi è aperto. Siccome $A \in GL_n(\mathbb{R})^+$ non può avere una colonna nulla riscrivo p come $p : GL_n(\mathbb{R})^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n/\{0\}$, ora p così definita è sempre aperta inoltre per $n > 1$ l'insieme $\mathbb{R}^n/\{0\}$ è connesso, se dimostro che le fibre sono connesse ho, per la proposizione 2.4.3, che $GL_n(\mathbb{R})^+$ è connesso. Consideriamo la fibra $p^{-1}(e_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ con } A \in GL_{n-1}(\mathbb{R})^+ \text{ e } v \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} = GL_{n-1}(\mathbb{R})^+ \times \mathbb{R}^{n-1}$(da vedere aggiustare A) ma per ipotesi induttiva $GL_{n-1}(\mathbb{R})^+$ è connesso e sappiamo già che $\mathbb{R}^n$ è connesso quindi per il corollario 2.4.3 $p^{-1}(e_1)$ è connesso. Sia ora $v \in \mathbb{R}/\{0\}$ e $A \in p^{-1}(v)$ allora esiste $B \in GL_n(\mathbb{R})^+$ tale che $v = Be_1$, allora $Bp^{-1}(e_1) \subset p^{-1}(v)$, analogamente $B^{-1}p^{-1}(v) \subset p^{-1}(e_1) \Longrightarrow p^{-1}(v) \subset Bp^{-1}(e_1)$ quindi $p^{-1}(v) = Bp^{-1}(e_1)$, se consideriamo l'omeomorfismo $L_A : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ tale che $L_A(B) = AB$, allora $p^{-1}(v) = L_B(p^{-1}(e_1))$ ovvero le fibre sono tutte omeomorfe tra di loro quindi sono tutte connesse, quindi si conclude che $GL_n(\mathbb{R})^+$ è connesso. Osserviamo infine che $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R})^+ \cup GL_n(\mathbb{R})^-$ e che se $B \in GL_n(\mathbb{R})^-$ allora $GL_n(\mathbb{R})^- = L_B(GL_n(\mathbb{R})^+)$ quindi $GL_n(\mathbb{R})$ non è connesso ed ha due componenti connesse $GL_n(\mathbb{R})^+,\ GL_n(\mathbb{R})^-$.

2) $GL_n(\mathbb{C})$ è connesso.

soluzione : La soluzione è analoga a $GL_n(\mathbb{R}^+$ quindi la lascio come esercizio.

3) $SL_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{C})$ sono connessi.

soluzione : Consideriamo $f : GL_n(\mathbb{R})^+ \longrightarrow SL_n(\mathbb{R})$ tale che $f(A) = det(A)^{-1}A$, è continua e surgettiva, siccome $GL_n(\mathbb{R})^+$ è connesso allora $f(GL_n(\mathbb{R})^+) = SL_n(\mathbb{R})$ è connesso. Analogamente a prima consideriamo $f : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow SL_n(\mathbb{C})$ tale che $f(A) = det(A)^{-1}A$, e si ha che $SL_n\mathbb{C}$ è connesso.

4) $SO_n(\mathbb{R})$, $SU_n(\mathbb{C})$, $U_n(\mathbb{C})$ sono connessi, invece $O_n(\mathbb{R})$ non è connesso ed ha 2 componenti connesse.

soluzione : Consideriamo $t : SO_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S^{n-1}$ tale che $t(A) =$ Prima colonna di A, questa applicazione è surgettiva perché ogni vettore di S^{n-1} lo posso completare a base e con i vettori della base costruisco una matrice, che è invertibile per costruzione (da vedere), ora procedo per induzione. Per $n = 1$ si ha $S =_1 (\mathbb{R}) = \{1\}$ che è connesso, per $n > 1$ si ha che S^{n-1} è connesso, inoltre t è una applicazione chiusa perché se $C \subset SO_n(\mathbb{R})$ chiuso ma $SO_n(\mathbb{R})$ è compatto quindi C è compatto e per continuità di f si ha $f(C)$ compatto, ma S^{n-1} è T_2 quindi $f(C)$ è chiuso, voglio applicare la proposizione 2.4.3, dimostro quindi che le fibre sono connesso. Consideriamo la fibra $p^{-1}(e_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & & & & \\ . & & & A & \\ . & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \text{ con } A \in SO_{n-1}(\mathbb{R}) \right\} = SO_{n-1}(\mathbb{R})$(da vedere aggiustare A) che è connesso per ipotesi induttiva. Concludiamo osservando che le fibre sono tutte omeomorfe.
Adesso osserviamo che $O_n(\mathbb{R})^+ = SO_n(\mathbb{R}) \cong O_n(\mathbb{R})^-$ quindi O_n non è connesso ed ha 2 componenti connesse $O_n(\mathbb{R})^+$, $O_n(\mathbb{R})^-$. La soluzione è del tutto analoga per U_n e SU_n, quindi si ha che sono connessi.

2.4.6 Teorema : Sia $f : X \longrightarrow Y$ chiusa con Y compatto e le fibre compatte. Allora X è compatto.

Dimostrazione : Posso assumere che f sia surgettiva dato che è chiusa infatti X è chiuso quindi $f(X)$ è chiuso ma Y compatto quindi $f(X)$ compatto, quindi porre $f(X) = Y$ non altera il problema. Sia ora $\mathscr{A}$ un ricoprimento aperto di X, posso supporre che sia chiuso rispetto alla operazione di unioni finite, infatti sia $\mathscr{B} = \{\bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid A_i \in \mathscr{A}\}$ il ricoprimento composto da tutte le unioni finite di elementi di $\mathscr{A}$, allora $\mathscr{A}$ ammette un sotto ricoprimento finito se e solo se $\mathscr{B}$ lo ammette. Ora sia $A \in X$ aperto e definiamo $A' = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset A\}$, A' è aperto infatti $Y/A' = f(X/A)$, X/A è chiuso e f è chiusa quindi Y/A' è chiuso e perciò A' è aperto. Consideriamo ora $\mathscr{A}' = \{A' \mid A \in \mathscr{A}\}$, questo è un ricoprimento aperto di Y,infatti sia $y \in Y$ e consideriamo la fibra $f^{-1}(y)$, questa è ricoperta da $\mathscr{A}$ e siccome le fibre sono compatte, esiste un sotto ricoprimento finito che la ricopre, quindi $f^{-1}(y) = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ con $A_i \in \mathscr{A}$, ma $\mathscr{A}$ è chiuso per unioni finite quindi $f^{-1}(y) \subset \mathscr{A}$, perciò $y \in f^{-1}(y)' \subset \mathscr{A}'$ e quindi è ricoprimento. Adesso, siccome Y è compatto, posso estrarre un sotto ricoprimento finito da $\mathscr{A}'$ quindi $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A'_i \Longrightarrow X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ quindi X è compatto.

$\square$

2.4.4 Corollario : Sia $f : X \longrightarrow Y$ chiusa con Y compatto e fibre compatte. Allora $f^{-1}(K)$ compatto per ogni K compatto di Y.

Dimostrazione : Sia K compatto di Y e consideriamo $f_K : f^{-1}(K) \longrightarrow K$ la restrizione di f, K è compatto le fibre di questa sono compatte ed inoltre è chiusa perché sia C chiuso di X, allora $f_K(C \cap f^{-1}(K)) = f(C) \cap K$ che è chiuso, quindi per il teorema precedente $f^{-1}(K)$ è compatto.

2.4.2 Definizione : Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua, allora si dice *propria* se e solo se le preimmagini di compatti sono compatte.

2.4.5 osservazione : f propria $\Longrightarrow$ ha fibre compatte.

2.4.6 osservazione : f chiusa $\not\Longrightarrow$ f propria.

2.4.1 esempio :

1) Sia $f : X \longrightarrow Y$ chiusa con fibre compatte e Y compatto allora f è propria.

2) Sia X compatto e Y arbitrario, allora $\pi X \times Y \longrightarrow Y$ è propria perché per ogni compatto K in Y si ha $f^{-1}(K) = X \times K$ che è compatto i quanto prodotto di compatti.

3) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = e^x$, non è propria perché $f^{-1}([0,1]) = (-\infty, 0]$ e $[0,1]$ è compatto ma $(-\infty, 0]$ non lo è.

4) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tale che $f(x) = e^x$ allora f è propria ed è pure un omeomorfismo.

2.5 Compattificazione di Alexandroff

Riprendiamo alcuni concetti spiegati precedentemente, abbiamo definito una funzione propria come quella funzione per cui la preimmagine di compatti è compatta e abbiamo visto che in una funzione propria le fibre sono compatte e che se una funzione è chiusa ed ha fibre compatte allora è propria. Inoltre abbiamo definito la locale compattezza come quella proprietà per cui ogni punto di uno spazio topologico ammette un intorno compatto.

2.5.1 osservazione : In generale una funzione propria non è necessariamente chiusa infatti consideriamo lo spazio di *Sierpinski* $X = \{x_0, x_1\}$ con la topologia $\{\emptyset, X, \{x_0\}\}$ e considero $f : \{x_0\} \hookrightarrow X$ tale che $f(x_0) = x_0$. f è propria perché gli insiemi finiti sono ovviamente compatti, ma non è chiusa in quanto x_0 non è chiuso dato che $x_1 = X/x_0$ non è un aperto della topologia.

2.5.1 esempio : Se è X è compatto allora è localmente compatto, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^N$ sono localmente compatti e i sottospazi di spazzi localmente compatti sono localmente compatti.

2.5.2 esempio : $\{x, y \mid y > 0\} \cup \{0\}$ non è localmente compatto infatti $\{0\}$ non ammette un intorno compatto. Se considero $\mathbb{Q}$ con la topologia euclidea non è localmente compatto infatti $X \subset \mathbb{Q}$ è compatto $\Longleftrightarrow$ è chiuso e limitalo in $\mathbb{R} \Longleftrightarrow X$ è una successione in $\mathbb{Q}$ contenente i propri punti di accumulazione per esempio $\{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$. Ora, ogni intorno di $\mathbb{Q}$, per la topologia di sottospazio, è della forma $(a, b) \cap \mathbb{Q}$, intorno di $\mathbb{R}$ intersecato Q, ma questo insieme non è compatto perché se no sarebbe chiuso e quindi $(a, b) = \overline{(a, b)} \supset (a, b)/\mathbb{Q}$ che è assurdo, dunque non contiene i propri punti di accumulazione quindi non è compatto.

2.5.1 Definizione : X è *compattamente generato* se la famiglia dei sottospazi compatti $\mathscr{C}(X)$ di X forma un ricoprimento fondamentale.

$\mathscr{C}(X)$ è fondamentale se è ricoprimento e se dato $U \subset X$ allora U è aperto se e solo se $U \cap K$ è aperto in K per ogni $K \in \mathscr{C}(X)$ o equivalentemente dato $C \in X$ allora C è chiuso se e solo se $C \cap K$ chiuso in K per ogni $K \in \mathscr{C}(X)$.

2.5.1 Proposizione : X localmente compatto $\Longrightarrow X$ compattamente generato.

Dimostrazione : Sia $\mathscr{C}(X)$ la famiglia di sottospazi compatti di X, questa è ricoprimento di X perché essendo localmente compatto ogni punto ha un intorno compatto e l'unione di tutti questi ricopre X ed essendo compatti stanno in $\mathscr{C}(X)$, vediamo che è fondamentale. Sia $U \subset X$ tale che $U \cap K$ è aperto in K per ogni $K \in \mathscr{C}(X)$, vediamo che U è intorno di ogni suo punto. Sia $x \in U$ allora, per la locale compattezza di X, ammette un intorno compatto K in X, K, in quanto intorno, contiene un aperto $A \in X$ tale che $x \in A \subset K$, inoltre per ipotesi $U \cap K$ è aperto in K quindi, per la topologia di sottospazio, esiste un aperto $B \subset X$ tale che $U \cap K = B \cap K$, vediamo che $U \cap A$ è aperto in X e $x \in U \cap A \subset U$ è quindi U è intorno di x. Ora so che $A \subset K \Longrightarrow A = A \cap K \Longrightarrow U \cap A = U \cap K \cap A = B \cap K \cap A = B \cap A$, A, B sono aperti di X quindi $U \cap A$ è aperto di X, contiene x ed è contenuto in U quindi si ha la tesi.

$\square$

2.5.1 Lemma : Sia Y di Hausdorff. Allora Y è compattamente generato $\Longleftrightarrow$ ogni applicazione continua $f : X \longrightarrow Y$ propria è chiusa.

Dimostrazione :

$(\Longrightarrow)$ Supponiamo Y di Hausdorff e compattamente generato e consideriamo $f : X \longrightarrow Y$ propria, dobbiamo vedere che f è chiusa. Sia $C \in X$ chiuso, allora $f(C)$ è chiuso $\Longleftrightarrow$ $f(C) \cap K$ è chiuso in K per ogni $K \in \mathscr{C}(X)$ compatto in quanto Y è compattamente generato. Sia $K \in Y$ compatto e consideriamo la restrizione $f : f^{-1}(K) \longrightarrow K$ allora ho che K è di Hausdorff perché sottospazio di uno spazio di Hausdorff e $f^{-1}(K)$ è compatto perché f è propria quindi $f|_K$ è chiusa per il corollario 2.4.1. Ora, $f|_K$ chiusa $\Longrightarrow$ $f(C) \cap K = f(C \cap f^{-1}(K))$ siccome $C \cap f^{-1}(K)$ è chiuso allora $f(C) \cap K$ è chiuso in K dunque $f(C)$ è chiuso in Y perché compattamente generato.

($\Longleftarrow$) Sia Y di Hausdorff e ogni $f : X \longrightarrow Y$ propria è chiusa, voglio vedere che Y è compattamente generato, vale a dire $C \cap K$ chiuso in K per ogni K compatto in Y $\longrightarrow$ $C \subset Y$ è chiuso in Y, l'altra implicazione è ovvia in quanto se $C \subset Y$ è chiuso in Y allora $C \cap K$ è chiuso in K per la topologia di sottospazio. Sia $C \subset Y$ tale che $C \cap K$ chiuso in K per ogni K compatto, consideriamo l'immersione $i : C \hookrightarrow Y$, allora i è propria infatti se $K \subset Y$ compatto allora $i^{-1}(K) = C \cap K$ chiuso in K dunque compatto, dunque i è chiusa per il corollario 2.4.1 quindi $C = i(C)$ è chiuso in Y.

$\square$

2.5.1 Teorema : Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua con Y di Hausdorff e compattamente generato. Allora f è propria $\Longleftrightarrow$ f è chiusa e le fibre sono compatte.

Dimostrazione :

($\Longleftarrow$) Per il lemma precedente è ovvio.

($\Longrightarrow$) Per il lemma precedente ho che f è propria e chiusa quindi ha anche fibre compatte.

$\square$

Sia X uno spazio topologico, considero l'insieme $\hat{X} = \{X\} \cup \{\infty\}$, ∞ è un punto formale, voglio renderlo compatto e tale che X sia un suo aperto. Definisco allora la topologia $\mathscr{T} = \{A \subset X \text{ aperto}\} \cup \{\hat{X}/K \mid K \subset X \text{ chiuso e compatto}\}$ su $\hat{X}$, Vediamo che è effettivamente una topologia su $\hat{X}$. Ovviamente $\emptyset$, $\hat{X} \in \mathscr{T}$, inoltre $\bigcup\limits_{A \subset X} A \in \mathscr{T}$ poi $\bigcup\limits_{K \text{ comp. e chiuso}} (\hat{X}/K) = \hat{X}/\bigcap\limits_{K}(K) \in \mathscr{T}$ in quanto $\bigcap\limits_{K} K$ è chiuso e compatto (da vedere), se invece $A \subset X$ aperto e K chiuso e compatto allora $A \cup (\hat{X}/K) = \hat{X}/(K/A) \in \mathscr{T}$ dato che K/A è chiuso e compatto. Infine l'intersezione di aperti X è ancora un aperto di X quindi anche di $\mathscr{T}$, poi $\bigcap\limits_{finita} (\hat{X}/K) = \hat{X}/\bigcup(K) \in \mathscr{T}$ perché $\bigcup(K)$ compatto e chiuso, inoltre s $A \subset X$ aperto e $K \subset X$ chiuso e compatto allora $A \cap (\hat{X}/K) = A/K$ che è aperto in X quindi $\mathscr{T}$ perché K chiuso.

2.5.2 Definizione : $\hat{X}$ è la *compattificazione di Alexandroff* di X.

2.5.2 osservazione : $i : X \hookrightarrow \hat{X}$ tale che $i(x) = x$, è una immersione aperta, infatti è continua per costruzione, e $p^{-1}(A)$ aperto in X per ogni $A \subset \hat{X}$ perché $p^{-1}(A) = A$ se $A \subset X$ o $p^{-1}(A) = X/K$ se $A = \hat{X}/K$.

2.5.3 osservazione : $\hat{X}$ è compatto, infatti sia $\mathscr{A}$ un ricoprimento aperto di $\hat{X}$ allora esiste $A_0 \in \mathscr{A}$ tale che $\infty \in A_0$ quindi esiste un chiuso e compatto $K \subset X$ tale che $A = \hat{X}/K$. Sia ha allora che $\hat{X} = A_0 \cup \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}/A_0} A$ quindi $K \subset \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}/A_0} A$, siccome K è compatto esiste sotto ricoprimento finito quindi esistono $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{A}/A_0$ tale che $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ di conseguenza $\hat{X} = A_0 \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ dunque ho trovato un sotto ricoprimento finito quindi $\hat{X}$ è compatto.

2.5.3 esempio : $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{C}$ ovvero $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$ infatti $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup U_1$ con $U_i = \{[z_0, z_1] \mid z_i \neq 0\}$ e $\gamma_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\gamma_0([z_0, z_1]) = \frac{z_1}{z_0}$ e $\gamma_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\gamma_1([z_0, z_1]) = \frac{z_0}{z_1}$ sono omeomorfismi e in particolare $U_1/U_0 = \{[0,1]\}$ quindi $\infty = [0,1]$ dunque $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup \{[0,1]\}$ e quindi $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \hat{U_0}$ è la compattificazione di Alexandroff di U_0 e U_0 è omeomorfo a $\mathbb{C}$. Per dimostrare che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \hat{U_0}$ dobbiamo mostrare se $A \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è un intorno aperto di $\infty = [0,1]$ allora $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})/A \subset U_0$ è compatto e chiuso in U_0. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})/A$ è chiuso perché A è aperto, vediamo che è limitato. $A \cap U_0 = A/\{[0,1]\}$ è aperto e $A \cap U_1$ è aperto e contiene $[0,1]$, siccome γ_1, definito sopra, è un omeomorfismo si ha che $\gamma_1(A \cap U_1)$ è un aperto di $\mathbb{Z}$ quindi contiene una palla aperta $B_\epsilon(0)$ di raggio ϵ e centro $0 = \gamma_1([0,1])$. Consideriamo la mappa $\mathbb{C}^* \xrightarrow{\gamma_1^{-1}} U_0 \cap U_1 = \{[z_0, z_1] \mid z_0, z_1 \neq 0\} \xrightarrow{\gamma_0} \mathbb{C}^*$ con $\gamma_0 \circ \gamma_1^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tale che $\gamma_0 \circ \gamma_1^{-1}(z) = z^{-1}$ e supponiamo $A \neq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ allora $A \cap U_1 \subset U_0 \cap U_1$ e quindi $\gamma_1(A \cap U_1) \supset B_\epsilon(0)/\{0\}$ e dunque $\gamma_0(A \cap U_1) = \gamma_0(\gamma_1^{-1}(B_\epsilon(0)/\{0\})) = \mathbb{C}/B_{\frac{1}{\epsilon}}(0) \Longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})/A \subset B_{\frac{1}{\epsilon}}(0)$ siccome $B_{\frac{1}{\epsilon}}(0)$ è limitato allora $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})/A$ è limitato. Se pensiamo a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ come S^2, dato che sono omeomorfi, allora U_0 corrisponde alla calotta inferiore della sfera e U_1 a la calotta superiore come in figura

(Figura 27)

e γ_1, γ_0 sono rispettivamente la proiezione stereografica con polo 0 e ∞.

2.5.4 osservazione : X chiuso in $\hat{X} \iff \{\infty\} \in \hat{X}$ è aperto $\iff$ X è compatto. X non è compatto $\iff$ $\hat{X} = \bar{X}$ la chiusura di X in $\hat{X}$ è $\hat{X}$.

2.5.5 osservazione : $\hat{X}$ è $T_2 \iff X$ è T_2 e localmente compatto infatti $x, y \in X$ allora sono separati in $\hat{X} \iff$ sono separati in $X \iff$ X è T_2. Invece $x \in X$ e $\infty \in \hat{X}$ sono separati in $\hat{X} \iff$ esistono U intorno aperto di x e V intorno aperto di ∞ tale che $U \cap U = \emptyset \iff K = X/V \subset X$ è chiuso e compatto e $U \subset K$ quindi K è un intorno compatto di $x \iff X$ è localmente compatto.

2.5.2 Lemma : Sia $f : X \hookrightarrow Y$ immersione aperta di spazi T_2 e definiamo $g : Y \longrightarrow \hat{X}$ tale che $g(y) = f^{-1}(y)$ se $y \in Imm(f)$ e $g(y) = \infty$ altrimenti. Allora g è continua.

Dimostrazione : Sia $U \subset \hat{X}$ aperto. Se U è aperto in X allora $g^{-1}(U) = f(U)$ che è aperto dato che f è aperta. Se $\infty \in U$ allora $K = \hat{X}/U$ è compatto, chiuso è scontato perché X è T_2, quindi $g^{-1}(U) = g^{-1}(\hat{X}/K) = Y/g^{-1}(K) = Y/f(K)$ che è aperto dato che K compatto e per continuità di f si ha $f(K)$ compatto e siccome Y è T_2 è anche chiuso.

$\square$

2.5.2 Teorema : X compatto e T_2 e sia $x_0 \in X$. Allora X è omeomorfo a $\widehat{X/\{x_0\}}$ che è la compattificazione di Alexandroff di $X/\{x_0\}$.

Dimostrazione : (da vedere riguarda) X è T_2 allora $\{x\}$ è chiuso dunque $X/\{x_0\} \subset X$ è aperto. $f : X/\{x_0\} \hookrightarrow X$ è una immersione aperta, per il lemma precedente posso estendere f a $g : X \hookrightarrow \widehat{X/\{x_0\}}$ continua tale che $g(x) = x$ se $x \neq \{x_0\}$ o $g(x) = \infty$ se $x = \infty$, siccome $\hat{X} = (X/\{x_0\}) \cup \{x_0\}$ si ha che g è una bigezione, vediamo che g è omeomorfismo. X è compatto, se mostriamo che $\widehat{X/\{x_0\}}$ è T_2 abbiamo che g manda un compatto in un T_2 e quindi è chiusa e una bigezione chiusa è un omeomorfismo. Sappiamo per l'osservazione 2.6.5 che è sufficiente mostrare che $X/\{x_0\}$ è T_2 e localmente compatto. $X/\{x_0\}$ è sottospazio di un T_2 quindi è T_2, sia $y \in X/\{x_0\}$, siccome X è T_2 esiste un intorno U di x_0 e V intorno di y aperti e disgiunti quindi $\bar{V} \subset X/U$ è chiuso in X dunque $x_0 \notin \bar{V}$ quindi $\bar{V}$ è compatto ed è intorno compatto di y in $X/\{x_0\}$.

$\square$

2.5.2 Proposizione : Sia $f : X \longrightarrow Y$ e consideriamo la sua estensione $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$ tale che $\hat{f}|_X = f$ e $f(\infty) = \infty$. allora

1) f propria $\Longrightarrow \hat{f}$ continua.

2) Y di Hausdorff $\Longrightarrow$ vale il viceversa del punto 1).

Dimostrazione :

1) Supponiamo f propria. Sia $U \subset \hat{Y}$ aperto, se $U \subset Y \Longrightarrow \hat{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ è aperto in X per continuità di f quindi aperto in $\hat{X}$. Se invece $\infty \in U \Longrightarrow K = Y/U$ è chiuso e compatto in Y, allora $\hat{f}^{-1}(U) = f^{-1}(\hat{Y}/K) = \hat{X}/\hat{f}^{-1}(K) = \hat{X}/f^{-1}(K)$, f propria $\Longrightarrow f^{-1}(K)$ è compatto e per continuità è chiuso quindi $\hat{X}/f^{-1}(K)$ è aperto.

2) Supponiamo Y è T_2 e $\hat{f}$ continua. Sia $K \in Y$ compatto $\Longrightarrow \hat{Y}/K$ è aperto in $\hat{Y}$ e contiene $\{\infty\}$ perchè Y è T_2 quindi K compatto è anche chiuso $\Longrightarrow \hat{f}^{-1}(\hat{Y}/K)$ è aperto in $\hat{X}$ per continuità di $\hat{f} \Longrightarrow \hat{X}/\hat{f}^{-1}(\hat{Y}/K)$ è compatto e chiuso in X ma $\hat{X}/\hat{f}^{-1}(\hat{Y}/K) = f^{-1}(K)$.

$\square$

2.5.3 Definizione : Sia $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X. $\mathscr{C}$ ha la *proprietà dell'intersezio* se comunque preso un sottoinsieme finito $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ si ha che $\bigcap_{C \in \mathscr{C}'} C \neq \emptyset$.

2.5.3 Proposizione : X è compatto $\Longleftrightarrow$ per ogni famiglia $\mathscr{C}$ di chiusi con la proprietà della intersezione finita vale $\bigcap_{C \in \mathscr{C}} C \neq \emptyset$.

Dimostrazione :

($\Longrightarrow$) Sia $\mathscr{C}$ famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita, supponiamo per assurdo che $\bigcap_{C \in \mathscr{C}} C = \emptyset \Longrightarrow X = X/\emptyset = X/\bigcap_{C \in \mathscr{C}} C = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} X/C$, X/C è aperto quindi è un ricoprimento aperto, ma X compatto quindi esistono un numero finito di chiusi per cui $X = \bigcup_{C_i \in \mathscr{C},\ i=0}^{n} C_i \Longrightarrow \bigcap_{C_i \in \mathscr{C},\ i=0}^{n} C_i = \emptyset$ assurdo.

($\Longleftarrow$) Sia $\mathscr{A}$ un ricoprimento aperto di X e supponiamo che non ammetta sotto ricoprimenti finiti allora $\bigcup_{A \in \mathscr{A}'} A \neq X$ per ogni $\mathscr{A}' \in \mathscr{A}$ finito quindi $\bigcap_{A \in \mathscr{A}'} X/A \neq \emptyset$ per ogni $\mathscr{A}' \in \mathscr{A}$ finito dunque $\{X/A\}_{A \in \mathscr{A}}$ è una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita e quindi vale $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} X/A \neq \emptyset \Longrightarrow \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \neq \emptyset$ assurdo perché $\mathscr{A}$ è ricoprimento.

$\square$

2.5.3 Teorema : X compatto $\Longleftrightarrow$ per ogni Y spazio topologico la proiezione $p : X \times Y \longrightarrow Y$ è chiusa.

Dimostrazione :

($\Longrightarrow$) Sia $p : X \times Y \longrightarrow Y$ proiezione e sia $C \subset X \times Y$ chiuso, vediamo che $Y/p(C)$ è intorno di ogni suo punto. Sia $y \in Y/p(C)$ e sia $A = (X \times Y)/C$, è aperto perché C chiuso, quindi per la topologia prodotto $A = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ con $U_i \subset X$ e $V_i \subset Y$ aperti, di conseguenza $f^{-1}(y) \subset A$, siccome $f^{-1}(y) = X \times \{y\} \cong X$ allora la fibra è compatta e quindi $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \times V_i$ unione finita. Posso assumere che $y \in V_i$ per ogni $i \leq n$ ovvero $y \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i \Longrightarrow X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \Longrightarrow X \times \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \times V_i \subset A \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ è aperto, contiene y ed è contenuto in $Y/p(C) \Longrightarrow Y/p(C)$ è intorno di y al variare di $y \in Y/p(C)$ quindi è aperto e quindi $p(C)$ è chiuso.

($\Longleftarrow$) Supponiamo che per ogni Y spazio topologico $p : X \times Y \longrightarrow Y$ chiusa, Consideriamo ora una restrizione del problema, ovvero assumiamo che X sia T_2 e localmente compatto non richiesto dalle ipotesi del teorema. Sia $\hat{X}$ la compattificazione di Alexandroff di X allora $\hat{X}$ è T_2. $p : X \times \hat{X} \longrightarrow \hat{X}$ è chiusa quindi $\Delta_{\hat{X}} \subset X \times \hat{X}$(da vedere secondo me è $\hat{X} \times \hat{X}$), la diagonale, è chiusa perché $\hat{X}$ è $T_2 \Longrightarrow \Delta_X = \Delta_X \cap (X \times \hat{X})$ (da vedere secondo me é $\hat{X} \cap$...) è chiusa in $X \times \hat{X} \Longrightarrow X = p(\Delta_5 X) \subset \hat{X}$ chiuso in un T_2 quindi X è compatto. Ritorniamo alle ipotesi del teorema e supponiamo che X non sia compatto, vale a dire che esiste una famiglia di chiusi $\mathscr{C}$ con la proprietà dell'intersezione finita ma che $\bigcap\limits_{C \in \mathscr{C}} C = \emptyset$. posso assumere che $\mathscr{C}$ sia chiusa rispetto alle intersezioni finite. Ora consideriamo $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ con la topologia $\mathscr{B} = \{\{x\} \mid x \in X\} \cup \{C \cup \{\infty\} \mid C \in \mathscr{C}\}$, è in effetti una base ed è chiusa per intersezioni finite infatti $(C_1 \cup \{\infty\}) \cap (C_2 \cup \{\infty\}) = (C_1 \cap C_2) \cup \{\infty\} \in \mathscr{B}$, negli altri casi è banale, inoltre la chiusura di X coincide con $\hat{X}$ infatti $\{\infty\}$ non è aperto in $\hat{X}$ perché $\emptyset \notin \mathscr{C}$. Ora sia $p : X \times \hat{X} \longrightarrow \hat{X}$ proiezione, chiusa per ipotesi, $\bar{\Delta}_X \subset X \times \hat{X}$ chiuso $\Longrightarrow$ $p()\bar{\Delta}_X$ è chiuso in $\hat{X} \Longrightarrow \bar{\Delta}_X = \bar{X} \ni \{\inf\}$ dunque esiste $x \in X$ tale che $(x), \infty) \in \bar{\Delta}_X \Longrightarrow$ ogni intorno di (x, ∞) in $X \times \hat{X}$ interseca Δ_X quindi $(U \times (C \cup \{\infty\})) \cap \Delta \neq \emptyset$ per ogni $U \subset X$ aperto e per ogni $C \in \mathscr{C} \Longrightarrow x \in C$ per ogni $C \in \mathscr{C}$ infatti se $x \notin C \Longrightarrow x \in X/C$ aperto $\Longrightarrow U \cap C \neq \emptyset \Longrightarrow (U \times (C \cup \{\infty\})) \cap \Delta = \emptyset$ assurdo.(da vedere)

□

2.6 Ancora su spazi proiettivi

(da vedere dispense fra. acq.) Lo spazio proiettivo oltre ad essere un quoziente di $\mathbb{R}^n$ ne è anche la sua compattificazione di Alexandroff infatti $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ con la topologia di aperti di $\mathbb{R}^n$ unito gli intorni di infinito. Lo studio del proiettivo è utile per studiare le radici dei polinomi ed il comportamento all'infinito come tangenti, di fatto in $\mathbb{R}^n$ non puoi fare uno studio concreto all'infinito perché l'infinito non lo puoi rappresentare come un punto e quindi non senso parlare di tangenti all'infinito o radici all'infinito, nel proiettivo è un punto e quindi ha senso parlare di radici all'infinito etc.., facciamo qual esempio

(Figura 28)

Consideriamo la parabola $z = 1$ in $\mathbb{R}^3$, lo spazio proiettivo non è altro che un punto di vista di uno spettatore quindi immaginiamo di essere posti sull'origine e di osservare la parabola, un punto qualsiasi della parabola è della forma $(t, t^2, 1)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$, consideriamo il fascio di rette passanti per l'origine e per la parabola che ha equazione $x^2 = zy$ (da vedere) osserviamo che la retta di equazione $\left\{ \begin{smallmatrix} x=0 \\ z=0 \end{smallmatrix} \right.$ è soluzione del fascio ma non proietta nessun punto della parabola, il problema e che ne comporre le equazioni cartesiane da equazioni parametriche si aggiungono punti che non appartengono allo spazio che stai studiando. Più esplicitamente consideriamo $\left\{\substack{x=t \\ y=t}\right.$ e $\left\{\substack{x=e^t \\ y=e^t}\right.$ queste sono equazioni parametriche della stessa equazione cartesiana $y = x$, ma la prima considera tutta la diagonale di $\mathbb{R}^2$ la seconda solo la diagonale strettamente positiva di $\mathbb{R}^2$. Consideriamo ancora $\left\{\substack{x=uv \\ y=v \\ z=v^2}\right.$ le equazioni parametriche di $x^2 - y^2 z = 0$ che ha grafico (da vedere)

(Figura 29)

o anche $\left\{\substack{x=t(t^2+1) \\ y=(t^2+1)}\right.$ queste coordinate sono rappresentate in figura come

(Figura 30)

si vede che l'insieme è sconnesso ma è assurdo dato che è immagine di $t \in \mathbb{R}$ che è connessa (da vedere). Nella prospettiva tutte le rette parallele incidono nelle stesso punto all'infinito, come studio l'infinito ? Consideriamo di essere in $\mathbb{R}^2$ allora scrivo le coordinate in questa forma $(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$ queste nel proiettivo corrispondono alle coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, ora consideriamo per esempio le rette parallele di equazione $y = 3x+1$ e $y = 3x+2$, ne faccio l'intersezione riscrivendo x, y nel modo fatto sopra quindi $\left\{\substack{\frac{x_2}{x_0}=3\frac{x_1}{x_0}+1 \\ \frac{x_2}{x_0}=3\frac{x_1}{x_0}+2}\right. \Longrightarrow \left\{\substack{x_2=3_1+x_0 \\ x_2=3x_1+x_0}\right.$ questo sistema in queste coordinate ha soluzione e nelle coordinate omogenee si esprime $[0, 1, 1]$ (da vedere) che è il punto all'infinito dove si incontrano.

Nelle scorse lezioni abbiamo preso $\mathbb{R}^{n+1}$ e abbiamo tolto lo 0 che non è altro che il punto di vista dello spettatore e in $\mathbb{R}^{n+1}/\{0\}$ abbiamo considerato la relazione di equivalenza $\sim$ tale che $x \sim y \iff x = \lambda y$ il quoziente $(\mathbb{R}^{n+1}/\{0\})/\sim = \{[x_0, \cdots, x_n]/\{0\}$ è lo spazio proiettivo e le rette sono identificate e abbiamo visto che è compatto e connesso. Vogliamo fare la stessa cosa in uno spazio vettoriale V qualsiasi, solo che in uno spazio vettoriale non abbiamo molte cose che abbiamo in $\mathbb{R}^n$, sappiamo che ogni spazio vettoriale è isomorfo a $\mathbb{R}^n$ affinchè ci sia questo isomorfismo bisogna introdurre in V delle coordinate, queste si possono ottenere se introduciamo una base, uno spazio vettoriale "diventa" $\mathbb{R}^n$ se ci mettiamo una base, che è il minimo per poter parlare di combinazioni lineari e coordinate. In analogia vogliamo ottenere gli stessi risultati di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ in $\mathbb{P}^n(V)$, proiettivo dello spazio vettoriale, quindi è necessario trovare un concetto intrinseco di base in $\mathbb{P}^n(V)$ in modo da poter introdurre le coordinate omogenee, teniamo conto che in uno spazio vettoriale non c'è il concetto di parallelismo come in $\mathbb{R}^n$, che è poi la differenza sostanziale tra uno spazio vettoriale e $\mathbb{R}^n$, infatti la retta è un sottospazio ed in particolare passa per l'origine una qualunque sua parallela non passerà per l'origine quindi perde la sua strutta di spazio vettoriale assumendo una struttura di spazio affine. In geometria si studiano gli invarianti per trasformazioni, come in uno spazio vettoriale si studiano gli invarianti per $GL_n(V)$ e O_n, analogamente faremo nel proiettivo per quanto riguarda le radici dei polinomi e lo studio delle quadriche.

2.6.1 Definizione : Sia $\sim$ la relazione di equivalenza in $V/\{0\}$ tale che $v \sim w \Longrightarrow v = \lambda w$ allora $(V/\{0\})/\sim = \mathbb{P}^n(V)$ spazio proiettivo di uno spazio vettoriale.

2.6.1 Lemma : Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_0, \cdots, v_n$ e $w_0, \cdots, w_n$ vettori, se $v_i // w_i$ ovvero $v_i = \lambda_i w_i$, si dicono *paralleli*, allora i v_i sono indipendenti se e solo se i w_i sono indipendenti.

Dimostrazione : Supponiamo i v_i indipendenti allora $\sum a_i v_i = 0 \Longrightarrow a_i = 0$ ora se consideriamo $\sum b_i w_i$ si ha $\sum b_i w_i = \sum b_i \lambda_i v_i \Longrightarrow b_i \lambda_i = 0 \Longrightarrow b_i = 0$, il viceversa è analogo.

Vogliamo introdurre il concetto di indipendenza anche nello spazio proiettivo, il proiettivo di V non è altro che un quoziente e questo conserva il concetto di indipendenza e di sottospazio.

2.6.2 Definizione : Sia W sotto spazio di V allora $\mathbb{P}^n(W)$ è *sottospazio proiettivo* di $\mathbb{P}^n(V)$.

2.6.3 Definizione : Sia S un sottoinsieme di $\mathbb{P}^n(V)$ e consideriamo la famiglia $\mathbb{F}$ dei sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(V)$ che contengono S allora $\bigcap_{F \in \mathbb{F}} F$ è lo *spazio generato* dal'insieme S.

2.6.4 Definizione : Consideriamo i punti $p_1,\ p_2,\ p_3$ allora si dice che p_1 è indipendente da $p_2,\ p_3$ se non appartiene allo spazio generato da $p_2,\ p_3$.

Con queste definizioni posso trovare un insieme finito di punti indipendenti che mi genera il mio spazio e quindi avere una base. Consideriamo $V/\{0\}$ e considero la base $p_0, \cdots, p_n$, ogni punto è una classe di equivalenza $p_i = [v_j]$ voglio vedere se riesco, con questo che ho ottenuto, a rendere $\mathbb{P}^n(V)$ come $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. In V ho $v = \sum x_i v_i$ che ha coordinate $[x_0, \cdots, x_n]$ se considero ora i punti $p_i = [v_i]$ sono indipendenti e nel proiettivo $q = [v]$ ha coordinate $[x_0, \cdots, x_n]$, ma $p_i = [v_i] = [kv_i]$ quindi q ha anche coordinate $[kx_0, \cdots, kx_n]$ quindi non è ben definita la base, aggiungo un altro punto indipendente $u = [v_0 + v_2 + \cdots + v_n]$ detto punto *unit*à e considero la base con i punti $p_0, \cdots, p_n, u$, questa base non genera l'ambigutà (da vedere) di prima e definisce effettivamente una base di $\mathbb{P}^n(V)$.

2.6.5 Definizione : Gli $n+2$ punti $p_0, \cdots, p_n, u$ sono detti $riferimento\ proiettivo$.

Voglio adesso trovare la nozione di somma e prodotto per scalare in $\mathbb{P}^n(V)$, ma è difficile perché dipende sempre dalla scelta dei rappresentanti infatti $p = [v] = [kv]$ e $q = [w] = [jw]$ ma $p+q = [v+w] \neq [kv+iw] = p+q$, allora considero la somma come unione ed il prodotto come intersezione. Con queste nozioni possiamo introdurre Grassmann $dim(A, B) + dim(A \cap B) =$

$dim(A) + dim(B)$ anche nello spazio proiettivo.

2.6.6 Definizione : La dimensione di uno spazio proiettivo è la dimensione dell0o spazio vettoriale di cui è proiettivo -1 e il vuoto ha dimensione -1.

2.6.7 Definizione : Uno spazio di dimensione 1 si chiama *retta*, uno di dimensione 2 si chiama *piano*, e così via in analogia con $\mathbb{R}^n$.

2.6.1 esempio : In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ un riferimento proiettivo è composto da 4 punti a 3 a 3 indipendenti $p_1,\ p_2,\ p_3, u$ che sono, in coordinate $x_0,\ x_1,\ x_2$, $[1,0,0],\ [0,1,0],\ [0,0,1],\ [1,1,1]$, lo spazio generato da p_1 e p_2 è il piano $x_0 = 0$ ed è la proiezione del piano proiettivo in $\mathbb{R}^3/\{0\}$.

Vogliamo ora capire come cambiare base di uno spazio proiettivo, ricordiamo che in uno spazio vettoriale si ha il diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "id"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Analogamente ci sarà lo stesso diagramma per il proiettivo in più la matrice di del cambiamento di base deve conservare il fattore di moltiplicazione perché i punti sono classi di equivalenza ed inoltre deve agire come A del diagramma di sopra su gli elementi della base meno l'unità, e per quanto riguarda i punti l'unità, vengono mandati in se stessi, quindi si ha che $A(v_i) = \lambda_i B(v_i) \Longrightarrow B^{-1}A(v_i) = \lambda v_i$ quindi sono autovettori inoltre siccome i punti unità vanno mandati in se stessi si ha $\lambda_i = 1$ (da vedere). (esempio con $ax_0 + bx_1 + cx_2$ forse cambiando base boh...) Ora abbiamo tutto per studiare il proiettivo di uno spazio vettoriale, possiamo definire il duale, ogni funzionale del duale ha nucleo un iperpiano e l'insieme dei funzionali con lo stesso nucleo e contratto ad un punto nel proiettivo. Ora $\mathbb{P}^n(V)$ con queste nozioni prende struttura di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con $X = \{x_0 \neq 0\} = \{[1, \frac{x_1}{x_0}, \cdots, \frac{x_n}{x_0}]\}$ che è $\mathbb{R}^n$ e $\{x_0 = 0\}$ sono i punti all'infinito.

2.6.2 esempio : In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ una retta è i luogo degli zeri di una equazione omogenea, vediamo cosa accade intersecando due rette $\begin{cases} ax_0+bx_1+cx_2=0 \\ dx_0+ex_1+fx_2=0 \end{cases}$ queste hanno sempre intersezione, supponiamo che in $\{x_0 \neq 0\}$ siano parallele, scrivendo le coordinate in x e y si ha $\begin{cases} a+bx+cy=0 \\ d+ex+fy=0 \end{cases}$ osserviamo che $\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix}$ ha rango 1 quindi ha soluzione con $x_0 = 0$ che sono i punti all'infinito.

2.6.1 esercizio : Trovare l'intersezione di $\begin{cases} y=x \\ y=x+1 \end{cases}$.

soluzione : mi trovo in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, voglio dire che le rette si incontrano in $[0, 1, 1]$.(da vedere finire).

2.6.3 esempio : Consideriamo il luogo degli zeri di $x_0 + 4x_1 + x_2 = 0$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, intanto l'applicazione definita non è una funzione infatti i punti $(1, 1, 1)$ e $(2, 2, 2)$ hanno immagine rispettivamente 12 e 24 ma nel proiettivo $(1, 1, 1)$ e $(2, 2, 2)$ sono lo stesso punto però ha due immagini distinte. Ora il luogo degli zeri è un chiuso perchÍ'applicazione in $\{x_0 \neq 0\}$ è della forma $3 + 4x + 5y$ ed è continua e il suo luogo degli zeri è chiuso, invece in $\{x_0 = 0\}$ gli zeri sono un chiuso perché sono immagine di $\{0\}$, che è un chiuso in $\mathbb{R}^3/\{0\}$, tramite la proiezione, in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, si conclude dicendo che $\{x_0 \neq 0\}$ e $\{x_0 = 0\}$ è un ricoprimento fondamentale di chiusi quindi il suo luogo degli zeri è unione delle varie intersezioni con i chiusi del ricoprimento. Riassumendo in generale si ha che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è compatto, fisso un sistema di coordinate x_0, x_1, x_2, considero $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ sono iperpiani e sono chiusi perché controimmagine, tramite la proiezione al quoziente come prima, di un chiuso e sono un ricoprimento fondamentale di chiusi, se il luogo degli zeri è chiuso in ognuno di questi allora è chiuso in tutto il proiettivo.

(da vedere riguarda quadriche di rango massimo omogenee, sono una in $\mathbb{C}$ e 2 in $\mathbb{R}$ e sono omeomorfe ad una sfera ed ad un toro in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}$ e mi raccomando retta tra due punti)

(da vedere cosa centra) Abbiamo trovato quindi una nozione di indipendenza usando l'unione e non la somma. Considero il corpo algebricamente chiuso $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$, Il luogo degli zeri di un polinomio di questo corpo si chiama varietà algebrica, considero ora un ideale I di polinomi e conisidero $V(I)$ il luogo degli zeri di dell'ideale, ovvero dove si annullano tutti i polinomi dell'ideale e inoltre considero $JV(I)$ che è l'insieme di tutti i polinomi che si annullano in $V(I)$ e questo è uguale al radicale $\sqrt{I}$ ovvero l'insieme di polinomi $p(x)$ per cui esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $p(x)^n \in I$. Considero ora la classe di funzioni $\mathscr{A}(\mathbb{C}^n)$, studio il suo luogo degli zeri, a seconda delle funzioni che considero lo studio degli zeri da luogo alla geometria algebrica o alla geometria analitica, se per esempio considero le curve chiuse, ogni curva è sempre luogo di zeri di una funzione $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{F} = \{\gamma = 0 \mid \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$.

Considero ora il proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, e studio il luogo dei polinomi omogenei $p(x_1, \cdots, x_n) = 0$, un polinomio omogeneo non è una funzione perché due rappresentanti diversi della stessa classe hanno la stessa immagine quindi un elemento del proiettivo ha diverse immagini, ma il luogo degli zeri è un chiuso perchè se consideriamo la proiezione $\mathbb{C}/\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}/\{0\}) = (\mathbb{C}/\{0\})/\sim$ si ha che $\pi^{-1}(p(x_1, \cdots, x_n))$ è un polinomio in $\mathbb{C}/\{0\}$ ed è anche una funzione, un cono, ed è un chiuso perché (da vedere), siccome la proiezione è chiusa allora $[p(x_1, \cdots, x_n)]$ è un chiuso e compatto perché contenuto in un compatto.

2.6.4 esempio : Consideriamo $\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) = \{[x_0, x_1, x_2, x_4]\}/\{0\}$, e siano $U_i = \{[x_0, x_1, x_2, x_4] \mid x_i \neq$

$0\}$, gli U_i sono un ricoprimento aperto dato che $[0,0,0,0] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, so che $p(x_0, x_1, x-2, x_3) = 0$ è un chiuso, se mi limito ad U_0 ho che $p(x_0, x_1, x-2, x_3) = x_0^d(1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0})$ per esempio se ho $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Longrightarrow x_0^d(1 + \frac{x_1}{x_0} + \frac{x_2}{x_0} + \frac{x_3}{x_0})$ e $X = \{x_0^d(\frac{x_i}{x_0}\}$, dove $d = degp$, sono le coordinate affini x, y, z in $\mathbb{C}^3$ dunque $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, $z = \frac{x_3}{x_0}$ quindi nell'esempio precedente si ha $1 + x^2 + y^2 + z^2$. Dunque ho che se ho $p(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ un polinomio, allora $x_0^{degp} p(x, y, z)$ è un polinomio omogeneo in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, *operazione di omogenizzazione*, trovo il luogo di zeri $\mathbb{F}$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ e $\mathbb{F} \cap U_0$ è il luogo di zeri di $p(x, y, z)$ in $\mathbb{C}^3$, l'insieme $\mathbb{F}$ di prima 'e detto *completamento proiettivo* degli zeri in $\mathbb{C}^3$.

2.6.5 esempio : In $\mathbb{C}^2$ consideriamo $x^2 - y^2 - 1 = 0$, il completamento proiettivo è $x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0$, ho aggiunto i punti con $x_0 = 0$, ovvero $[0, 1, 1]$ e $[0, 1, -1]$ ($[0, 1, -1]$ e $[0, -1, 1]$ stanno nella stessa classe) quindi l'ellisse ha due punti immaginari all'infinito dati da $\{x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0 \cap \{x_0 = 0\}\} = \{x_1^2 + x_2^2 = 0\} = \{[0, 1, i], [0, 1, -i]\}$. Questo risultato lo avevamo già ottenuto con il teorema di Sylvester, che classifica le forme quadratiche omogenee ${}^tXAX$, ce ne sono una in $\mathbb{C}^n$, in $\mathbb{R}^n$ si usa la segnatura. In $\mathbb{C}^2$ tutte le forme quadratiche sono equivalenti quindi hanno tutte due punti complessi all'infinito per esempio l'iperbole $x^2 - y^2 - 1 = 0$ ha (da vedere) $[1, 1, 0]$ e $[1, -1, 0]$ punti all'infinito, invece la coppia di rette $x^2 - y^2 = 0$ ha le due tangenti all'infinito. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ le coniche si classificano con Sylvester (In $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ si classificano con il teorema di Hassey-Mincosky).

(da vedere S^3 è unionre di due tori pieni-S^3 è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^3$; La contrezione del complementare di un disco chiuso in $\mathbb{R}^2$ è un disco più un punto che è insiemisticamente S^1 ma non è omeomorfo perché non è T_2 invece S^1 si; se avessi preso il complementare di un disco aperto allora la sua contrazione è S^1; $\mathbb{C}$ è orientabile, ma se lo consideri come corpo no; Argomento del complesso $-1 - i$ non è $arctan(\frac{\pi}{4}$; Un nodo è una immersione di S^1 in $\mathbb{R}^3$, un nodo è sciolto se esiste una applicazione $\gamma : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che manda il nodo in S^1)

2.6.1 Proposizione : Le quadriche su $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ a meno di un omeomorfismo sono la sfera e il toro $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Dimostrazione : Prendo una quadrica in $\mathbb{R}^3$ e la omogenizzo, con Sylvester ottengo tre classi di quadriche : $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ (non ho alterato le proprietà topologiche delle quadriche quindi procedo con lo studio), Il luogo degli zeri della prima è il vuoto, e della seconda è una sfera, basta dividere per x_3^2 (questi due luoghi di zeri non sono equivalenti topologicamente ma sono entrami connessi e compatti). Rimane la terza da classificare, in coordinate affini ho $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 - z^2 = 1 - y^2 \Longrightarrow (x - z)(x + z) = (1 - y)(1 + y) \Longrightarrow r_{\mu,\lambda} = \begin{cases} \mu(x-z) = \lambda(1-y) \\ \lambda(x+z) = \mu(1+y) \end{cases}$ e $s_{a,b} = \begin{cases} b(x-z) = a(1-y) \\ a(x+z) = b(1+y) \end{cases}$, $r_{\mu,\lambda}$ e $s_{a,b}$ sono due famiglie di rette ad un parametro e li chiamo *regoli*. Ora osserviamo che $r_{\mu,\lambda} \cap r_{\mu',\lambda'}$ non hanno intersezione invece $r_{\mu,\lambda} \cap s_{a,b}$ hanno un punto di intersezione, ovvero due regoli della stessa famiglia non ti intersecano, invece due regoli di famiglie diverse si intersecano in un punto, Considero ora l'applicazione $\Phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \{x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0\}$ tale che $\Phi(([\lambda,\mu],[a,b])) = r_{\mu,\lambda} \cap s_{a,b}$, l'applicazione è continua, biunivoca e chiusa infatti un chiuso in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è compatto quindi l'immagine del compatto è compatta, ma il luogo degli zeri è T_2 quindi l'immagine è chiusa (da vedere), in conclusione Φ è un omeomorfismo.(da vedere sistema con le dispense)

$\square$

2.7 Gruppi topologici

consideriamo il sistema differenziale $\left\{\begin{smallmatrix}\dot{x}=f\\ \dot{y}=g\end{smallmatrix}\right.$ le soluzione sono diffeomorfismi della forma $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in funzione del tempo e non sono altro che azioni del gruppo $\mathbb{R}$, che rappresenta il tempo, sull'insieme $\mathbb{R}^2$, che sarebbe lo spazio, una singola soluzione è un'orbita dell'azione ovvero preso un punto vediamo come cambia al variare del tempo, invece ad un istante t l'insieme dei valori determinano il flusso. Consideriamo ora l'azione $G \times X \longrightarrow X$ dove G gruppo e X spazio topologico allora $x \sim y \iff$ esiste $g \in G$ tale che $g \cdot x = y$ e otteniamo la contrazione X/G, mettiamoci una topologia.

2.7.1 Teorema : Supponiamo che esiste A aperto di X tale che l'insieme $\Gamma = \{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset\}$ è finito e inoltre $\pi(A) = X/G$ dove $\pi : X \longrightarrow X/G$ e supponiamo che X sia T_2. Allora X/G è T_2.

Dimostrazione : Sia $p, q \in X/G$ Voglio dimostrare che hanno due intorni disgiunti, allora siano $x, y \in A$ tale che $\pi(x) = p$ e $\pi(y) = q$, devo trovare due intorni saturi di $\pi^{-1}(p)$ e di $\pi^{-1}(q)$. So che Γ è finito ed è composto da $g_1, \cdots, g_n$, considero allora i punti $y, g_1(y), \cdots, g_n(y)$ e $x, g_1(x), \cdots, g_n(x)$ sappiamo che esistono U_0 intorno di x e V_0 intorno di y disgiunti e esistono U_i intorno di $g_i(x)$ e V_i intorno di $g_i(y)$ disgiunti dato che X è T_2, considero $U = (\bigcap U_i) \cap A$ e $V = (\bigcap g^{-1}(V_i)) \cap A$, sono aperti perché gli U_i e V_i sono aperti e finiti e g è un omeomorfismo inoltre U e $g(V)$ hanno intersezione vuota per ogni g infatti se $g \notin \Gamma$ si ha che $g(A) \cap A = \emptyset$ ma $U, V \in A \implies U \cap g(V) = \emptyset$, se invece $g \in \Gamma$ supponiamo per assurdo che $U \cap g(V) \neq \emptyset$, allora $g(V) \subset g(V_i)$ per qualche i, allora $p \in g(U_i) \cap g(V_i)$ assurdo perchè sono disgiunti per ipotesi. Ora U, V costruiti prima sono intorni di x, y rispettivamente e considero $\bigcup\limits_{g \in G} g(U)$ e $\bigcup\limits_{h \in G} h(V)$ questi sono intorni di x, y rispettivamente e sono aperti saturi per costruzione e perch'e g è omeomorfismo inoltre $\bigcup\limits_{g \in G} g(U) \cap \bigcup\limits_{h \in G} h(V) = \emptyset$ infatti se supponiamo che non lo sia allora $\bigcup\limits_{g \in G} g(U) \cap \bigcup\limits_{h \in G} h(V) = \bigcup\limits_{g,h \in G} g(U) \cap h(V) \implies$ per ogni $g, h \in G$ si ha $g(U) \cap h(V) \neq \emptyset \implies U \cap g^{-1}h(V) \neq \emptyset$ ma $g^{-1}h \in G$ quindi assurdo per quando detto prima.

$\square$

2.7.1 Proposizione : La proiezione al quoziente $\pi : X \longrightarrow X/G$ è aperta.

Dimostrazione : Sia $A \in X$ un aperto, $\pi(A)$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto, per la topologia quoziente, $\pi^{-1}(\pi(A))$ è la saturazione di A ovvero $\pi^{-1}(\pi(A)) = \underset{g\in G}{g(A)}$ ma i g sono omeomorfismi quindi $g(A)$ sono aperti dunque $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto (se G finito da vedere) quindi $\pi(A)$ è aperto e dunque π è aperta.

$\square$

Nell'esempio 1.3.2 abbiamo visto un quoziente non T_2 di uno spazio T_2 che è lo spazio $\mathbb{R}\times\{0,1\}$, vogliamo vedere con sotto quali condizioni il quoziente di un T_2 sia ancora T_2.

2.7.1 Lemma : (Teorema di Wollace) Siano X, Y spazi topologici e siano $A \subset X$ e $B \subset Y$ compatti, inoltre sia $W \subset X \times Y$ aperto con $a \times B \subset W$. Allora esistono $U \subset X$ e $V \subset Y$ aperti tale che $A \times B \subset U \times V \subset W$.

Dimostrazione : Per la topologia prodotto $W = \bigcup\limits_{i\in I} U_i \times V_i$ con U_i aperti di X e V_i aperti di Y, fissiamo $a \in A$ allora $\{a\} \times B \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i \times V_i$, siccome $\{a\} \times B$ è omeomorfo a B e B è compatto allora $\{a\} \times B$ è compatto dunque posso estrarre un sotto-ricoprimento finito e ottenere $\{a\} \times B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i \times V_i \Longrightarrow \{a\} \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ e $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$, allora nomino $U_a = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ e $V_a = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i \Longrightarrow \{a\} \times B \subset U_a \times V_a \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i \times V_i \subset W$. Ora $A \subset \bigcup\limits_{a\in A} U_a$, ma A è compatto quindi posso estrarre un sotto-ricoprimento finito quindi $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{a_i}$, d'altro canto $B \subset V_a$ per ogni $a \in A \Longrightarrow B \bigcap\limits_{i=1}^{m} V_{a_i}$ quindi nomino $U = \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{a_i}$ e $\bigcap\limits_{i=1}^{m} V_{a_i}$ quindi $A \times B \subset U \times V = (\bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{a_i}) \times (\bigcap\limits_{i=1}^{m} V_{a_i}) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} (U_{a_i} \times V_{a_i}) \subset W$ e $U \times V$ è un aperto.

$\square$

2.7.2 Teorema : Sia X compatto e T_2 e sia $f : X \longrightarrow Y$ una identificazione. Allora sono equivalenti :

1) Y è T_2.

2) $K = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\} \subset X \times X$ è chiuso.

3) f è chiusa.

Dimostrazione : ($1 \Longrightarrow 2$) Consideriamo la diagonale $\Delta_Y \subset Y \times Y$, è chiusa perché Y è T_2, e sia $f \times f : X \times X \longrightarrow Y \times Y$, è continua e abbiamo che $K = (f \times f)^{-1}(\Delta_Y) \Longrightarrow K$ è chiuso.

(2 $\Longrightarrow$ 3) Supponiamo K chiuso, sia $C \subset X$ chiuso allora per definizione di topologia quoziente $f(C)$ in Y è chiuso se e solo se $f^{-1}(f(C))$ è chiuso in X. X è compatto dunque le proiezioni $\pi_i : X \times X \longrightarrow X$ sulla prima e seconda componente sono chiuse, ora consideriamo $K \cap \pi_2^{-1}(C) = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2),\ x_2 \in C\}$ è chiuso perché intersezione del chiuso K e del chiuso $\pi_2^{-1}(C)$, quest'ultimo chiuso perché C chiuso e la proiezione sulle componenti, come detto prima, è chiusa. Ora $\pi_1(K \cap \pi_2^{-1}(C)) = \{x \in X \mid x \in f(C)\} = f^{-1}f(C)$ che è chiuso quindi f è chiusa.

(3 $\Longrightarrow$ 1) Supponiamo f chiusa, fissiamo a e b in Y distinti e consideriamo $f^{-1}(a)$ e $f^{-1}(b)$ compatti e disgiunti in X allora $f^{-1}(a) \times f^{-1}(b) \subset (X \times X)/\Delta_x$ ed è aperto in quanto Δ_x è chiuso perché X è T_2. Per il lemma precedente esistono U, V aperti di X tale che $f^{-1}(a) \times f^{-1}(b) \subset U \times V \subset (X \times X)/\Delta_x$ in particolare $f^{-1}(a) \in U$ e $f^{-1}(b) \in V$ e siccome sono disgiunti si ha $(X/U) \cup (X/V) = X$. Siano ora $U' = Y/f(X/U)$ e $V' = Y/f(U/V)$ che sono aperti di Y, si ha che $f^{-1}(a) \subset U \Longrightarrow a \in U'$ e $f^{-1}(b) \subset V \Longrightarrow b \in V'$ quindi U' e V' sono intorni di a e b rispettivamente in Y, sono inoltre disgiunti perché $U' \cap V' = Y/(f(X/U) \cap f(U/V) = Y/Y = \emptyset$.
$\square$

Ora consideriamo l'azione di gruppo di G su uno spazio topologico X equivalentemente consideriamo un omomorfismo di gruppi $\Psi : G \longrightarrow Homeo(X)$ tale che $\Psi(g) = \Psi_g$ dove $Homeo(X)$ è gruppo con l'operazione di composizione dell'insieme degli omeomorfismo da X in se stesso, dato $g \in G$ e $x \in X$ allora $\Psi_g(x)$ si scrive $g \cdot x$. Una azione induce una relazione di equivalenza su X ovvero $x \times y \Longleftrightarrow$ esiste $g \in G$ tale che $x = g \cdot y \Longleftrightarrow x \in Gy = \{z \mid z = g \cdot y,\ g \in G\}$. Definiamo X/G come lo spazio topologico quoziente $Y = X/\sim$, mi chiedo ora quando Y è T_2; In generale per ogni y_1, y_2 distinti in Y esistono aperti saturi disgiunti U, V in X con $f^{-1}(a) \subset U$ e $f^{-1}(b) \subset V$, ora se la relazione di equivalenza è indotta da una azione di un gruppo G allora saturo significa essere G-stabile.

2.7.1 osservazione : $p : X \longrightarrow X/G$ è sempre una identificazione aperta infatti sia U aperto di X allora $gU \subset X$ è aperto per ogni $g \in G$ in quanto g sono omeomorfismi, quindi $P(U) = p(\bigcup_{g \in G} gU)$ è aperto ($\bigcup_{g \in G} gU$ è un aperto saturo). Se G è finito allora p è anche chiusa.

2.7.2 Proposizione : G agisce su X, allora $Y = X/G$ è $T_2 \Longleftrightarrow K \subset X \times X$ è chiuso, dove $K = \{(x, gx) \mid g \in G\}$.

Dimostrazione : Sia $f : X \times X \longrightarrow Y \times Y$ e $p : X \longrightarrow X/G$ la mappa quoziente, quindi $f = p \times p$ e dunque f è una identificazione aperta perché p è identificazione aperta e perciò la topologia prodotto su $Y \times Y$ è una topologia quoziente (indotta da $X \times X$). Sia ora $C \subset Y \times Y$, è chiuso se e solo se $f^{-1}(C) \subset X \times X$ è chiuso. Se considero $C = \Delta_Y$ si ha che $f^{-1}(\Delta_Y) = K$ dunque Y è $T_2 \Longrightarrow K$ è chiuso.

$\square$

2.7.1 esempio : Gli spazi proiettivi $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sono T_2. Consideriamo il caso reale (il caso complesso è analogo), osserviamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1}/\{0\})/\mathbb{R}^*$ ovvero è il quoziente del gruppo $\mathbb{R}^*$ che agisce su $\mathbb{R}^{n+1}/\{0\}$ e quindi sappiamo che è T_2 se e solo se K è chiuso. $K = \{(v, w) \in \mathbb{R}^{n+1}/\{0\} \mid \text{ non nulli e proporzionali}\} \subset (\mathbb{R}^{n+1}/\{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1}/\{0\})$, osserviamo che $K' = \{(v, w) \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \text{ non nulli e proporzionali}\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} = M_{2,n+1}(\mathbb{R})$ è chiuso in quanto definito dall'annullarsi dei minori 2×2 della matrice (da vedere) quindi $K = (\mathbb{R}^{n+1}/\{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1}/\{0\}) \cap K'$ è chiuso.

2.7.2 esempio : $GL_n(\mathbb{R})$ agisce su $\mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^n/GL_N(\mathbb{R}) = \{[0], [e_1]\}$ è lo spazio quoziente, $\{[0]\}$ non è aperto e $\{[e_1]\}$ è aperto perché $\mathbb{R}^n/\{0\} = GL_n \cdot e_1$ dunque Y non è T_2.

2.7.2 osservazione : Nell'implicazione $3 \Longrightarrow 1$ del teorema ovvero $f : X \longrightarrow Y$ chiusa con X compatto e T_2 implica Y di Hausdorff iniziava con l'affermazione <Sia $a \in Y$ allora f^{-1} è compatto>, giustifichiamola; Infatti f surgettiva e chiusa e X è T_2 quindi Y è T_1 (ogni punto è chiuso) quindi le fibre di f sono chiuse (da vedere).

2.7.3 Teorema : Sia X uno spazio di Hausdorff e G gruppo che agisce su X con la seguente proprietà : per ogni $x, y \in X$ esiste U intorno di x e V intorno di y tale che $gU \cap V = \emptyset$ tranne che per al più un numero finito di $g \in G$. Allora X/G è T_2.

Dimostrazione : Siano $x, y ß X$ tale che $Gx \neq Gy$. Dobbiamo mostrare che esistono $A, B \subset X$ aperti G-stabili disgiunti con $x \in A$ e $y \in B$. Siano U, V intorni rispettivamente di x, y con la proprietà e siano $g_1, \cdots, g_n$ gli elementi tale che $g_i U \cap V \neq \emptyset$. X è T_2 quindi posso separare y da ogni $g_i x$ quindi esistono $g_i \in U_i$ e $y \in V_i$ intorni in X disgiunti. Definiamo $U' = U \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} g_i^{-1}(U_i)$ e $V' = V \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} g_i^{-1}(V_i)$, sono intersezioni finite. U' e V' sono intorni rispettivamente di x e y non sono G-stabili ma sono disgiunti, vediamo ora che $gU' \cap V' = \emptyset$ per ogni $g \in G$. Sia $g \in G$ con $gU \cap V = \emptyset \Longrightarrow gU' \cap V' \subset gU \cap V = \emptyset$, sia invece $g \in G$ tale che $gU \cap V \neq \emptyset$ allora $g = g_i$ per qualche i, quindi per qualche i $gU \cap V \subset U_i \cap V_i = \emptyset$. Sia ora $A = \bigcup\limits_{g \in G} gU'$ e $B = \bigcup\limits_{g \in G} gV'$ intorni in X, si ha che $x \in A$ e $y \in B$, A e B sono G-stabili per costruzione e sono disgiunti infatti $A \cap B = \bigcup\limits_{g,h \in G} (gU' \cap hV')$ ora $gU' \cap hV' = h(h^{-1}gU' \cap V')$ ma abbiamo visto che $h^{-1}gU' \cap V' = g'U' \cap V' = \emptyset \Longrightarrow A \cap B = \emptyset$.

$\square$

2.7.3 esempio :

1) G gruppo finito verifica la proprietà.

2) $\mathbb{Z}^n$ agisce su $\mathbb{R}^n$ per traslazione e verifica la proprietà infatti Sia $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < 1 \ \forall i\}$ aperto in $\mathbb{R}^n$. Allora $gU \cap U \neq \emptyset$ solo per un numero finito di $g \in \mathbb{Z}^n$ in quanto $gU = U + a$ per un certo a e $gU \cap U \neq \emptyset \iff |a_i| < 1$ per ogni i. Ora $\{U + a\}_{a \in \mathbb{Z}^n}$ ricopre $\mathbb{R}^n$ quindi siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ allora $x \in U + a$ e $b \in U + b$ per certi $a, b \in \mathbb{Z}^n$. Osserviamo che $g(U + a) \cap (U + b) = (U + a + c) \cap (U + b)$ per un certo c, ma $(U + a + c) \cap (U + b) = (U + a + b + c) \cap U = g'U \cap U \neq \emptyset$ per un numero finito di g' per quanto osservato prima.

2.7.1 Definizione : G agisce su X. Si dice che $D \subset X$ è un *dominio fondamentale* per l'azione se :

1) D interseca tutte le orbite di G ovvero $X = \bigcup_{g \in G} gD$.

2) $Int(gD \cap hD) = \emptyset$ per ogni $g \neq h$ ovvero $gD \cap hD = g(\partial D) \cap h(\partial D)$.

2.7.4 esempio :

1) $\mathbb{Z}^n$ agisce per traslazione su $\mathbb{R}^n$, allora $[0, 1]^n$ è un dominio fondamentale.

2) Considero l'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}^2/\{0\}$ definita da $n \cdot x = 2^n x$. Allora $D = \{z \subset \mathbb{R}^2/\{0\} \mid 1 \leq ||z|| \leq 2\}$ è un dominio fondamentale.

3) $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ agisce per rotazione su $\mathbb{R}^2$, dove il generatore è una rotazione di angolo $\frac{2\pi}{n}$ allora il settore di piano compreso fra l'asse positivo delle ascisse e la retta per l'origine inclinata di $\frac{2\pi}{n}$ è un dominio fondamentale, come i figura.

(Figura 41)

Mi chiedo chi sia D/G, dove D è il dominio fondamentale dell'azione (supposto che esista), e D/G è il quoziente dato dalla relazione indotta da X ovvero $d_1 \sim d_2 \iff Gd_1 = Gd_2$.

2.7.5 esempio : Consideriamo gli esempi 1,2,3 precedenti :

1) $[0, 1]^n/\mathbb{Z}^n$ è un toro $S^1 \times \cdots \times S^1$.

2) $D/\mathbb{Z}$ è un toro.

3) $D/(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}})$ è un cono, si identifica l'asse delle ascisse positiva con la retta inclinata di $\frac{2\pi}{n}$.

I questi tre esempi abbiamo che X/G è T_2. Vogliamo confrontare D/G con X/G, abbiamo che $D \hookrightarrow X$ immersione chiusa, $D \twoheadrightarrow D/G$ e $X \twoheadrightarrow X/G$ identificazioni aperte consideriamo quindi il diagramma :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "\pi_1"'] \arrow[dr] & X \arrow[d, two heads, "\pi_2"] \\ D/G \arrow[r, "f"'] & X/G \end{tikzcd}$$

Per la proprietà universale f è continua e bigettiva, mi chiedo quando sia un omeomorfismo. Se D è compatto e X/G è T_2 allora f è chiusa dunque omeomorfismo, ciò accade negli esempi 1 e 2 precedenti. Se invece π_2 è chiusa e G è finito allora f è omeomorfismo. Nell'esempio 3 possiamo essere più precisi, vediamo che $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}})$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$, se trovo $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che le fibre di p sono le $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$-orbite allora vale :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "p"] \arrow[d] & & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}) \arrow[urr, "f"] & & \end{tikzcd}$$

f è continua e biettiva, se dimostro che p è chiusa o aperta allora f è un omeomorfismo. Consideriamo $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $p(z) = z^n$, ha per fibre le orbite di $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ è surgettiva ed è chiusa perché è propria, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ dunque abbiamo fatto.

2.7.3 osservazione : In generale $D/G \ncong X/G$.

2.7.6 esempio : Ri-consideriamo l'esempio 2 dove si ha l'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}^2/\{0\}$ tale che $n \cdot v = 2^n v$ e $D = \{z \in \mathbb{R}^2/\{0\} \mid 1 \leq ||z|| \leq 2\}$. Visualizziamo D graficamente

(Figura 42)

sostituiamo la parte di D che sta nel primo quadrante con la parte di piano che sta tra e^{-x} e $2e^{-\frac{x}{2}}$ come in figura

(Figura 42)

Questo è ancora un dominio fondamentale per l'azione e lo chiamo D', ma D/G non è T_2 (da vedere, D/G o D'/G?, gD allarga la figura quindi ci sono punti che hanno intorni che intersezione non vuota tranne che al più per un numero finito di casi quindi non è T_2) quindi non può essere omeomorfo a X/G che è T_2.

2.7.1 esercizio : Mostrare che $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ con l'azione $n \cdot v = 2^n v$ non è T_2.

2.7.2 Definizione : Un ricoprimento $\mathscr{C}$ di X è *localmente finito* se per ogni $x \in X$ esiste U intorno di x tale che $U \cap C \neq \emptyset$ sono per un numero finito di $C \in \mathscr{C}$.

2.7.4 osservazione : Supponiamo che $D \subset X$ sia un dominio fondamentale su X/G, consideriamo il ricoprimento $\{gD\}_{g \in G}$. Nell'esempio precedente si ha che il ricoprimento $\{gD\}_{g\in G}$ non è localmente finito infatti i punti del segmento $\{(x, 0) \mid x \in [1, 2]\}$ del dominio D non hanno intorni che intersecano solo un numero finito di gD.

2.7.4 Teorema : Sia D un dominio fondamentale per X/G e supponiamo che $\{gD\}_{g\in G}$ sia localmente finito. Allora $X/G \cong D/G$.

Dimostrazione : Abbiamo il diagramma :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "p"'] & X \arrow[d, two heads, "q"] \\ D/G \arrow[r, "f"'] & X/G \end{tikzcd}$$

con f continua e bigettiva, vediamo che f è aperta. Sia A aperto di D/G, $f(A)$ è aperto se e solo se $q^{-1}(f(A))$ è aperto (per la topologia quoziente). A è aperto ed è immagine, tramite p, di un aperto di D, che per la topologia di sottospazio è della forma $D \cap B$ con B aperto in X, dunque $A = p(D \cap B)$, ma per la topologia quoziente di D/G, A è aperto se e solo se $p^{-1}(A) = D \cap B$ è aperto in X dunque $q^{-1}(f(A)) = \bigcup_{g\in G} g(D \cap B)$, pertanto f è aperta se e solo se $V = \bigcup_{g\in G} g(D \cap B)$ è aperto in X. Sia $x \in V$, vediamo che V contiene un intorno di x. Posso assumere $x \in D \cap B$, a meno di riportarcelo con una g, ora $\{gD\}_{g\in G}$ è localmente finito quindi esiste un intorno U di x che interseca in modo non banale solo un numero finoto di gD, li chiamo $g_1D, \cdots, g_nD$. Posso assumere che $x \in g_iD$ per ogni $i \leq n$ infatti se $x \notin g_jD$ per qualche j allora U/g_jD è ancora intorno di x quindi se prendo tutti i g_jD tale che $x \notin g_jD$ e li sottraggo da U, siccome sono in numero finito, $U/(\bigcup g_jD)$ è ancora un intorno di x, interseca un numero finito di g_iD, che sono quelli restanti e in ognuno di questi è presente x. Dunque $U \subset \bigcup_{i=1}^{n} g_iD$ e $x \in g_iD$ per ogni $i \leq n$ in particolare questo implica che $g^{-1}x \in D$ dunque $p(g^{-1}x) = p(x) \implies g^{-1}x \in D \cap B \implies x \in g_iB$. Sia $U' = U \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_iB$ è intorno di x e $U' \subset V$ infatti sia $y \in U' \implies y \in U \subset g_iD \implies y \in g_iB \implies y \in g_i(D \cap B) \subset V$.

□

2.7.3 Proposizione : Le tre affermazioni sono equivalenti :

1) G agisce tramite omeomorfismi su X.

2) $\Phi : G \longrightarrow Homeo(X)$ tale che $\Phi(g) = \Phi_g$ è un omomorfismo di gruppi.

3) $\Psi : G \times X \longrightarrow X$ tale che $\Psi((g,x)) = g \cdot x = \Phi_g(x)$ è continua e G è dotato della topologia discreta.

Dimostrazione :

($1 \implies 3$) Sia U un aperto di X allora $\Psi^{-1}(U) = \{(g,x) \mid gx \in U\} = \bigcup\{g\} \times g^{-1}(U)$ che è aperto in $G \times X$ perché $\{g\}$ è aperto in G per la topologia discreta e $g^{-1}(U)$ aperto perché g omeomorfismo per ipotesi dunque per la topologia prodotto l'immagine è aperto di $G \times X$. Le altre implicazioni sono lasciate per esercizio.

□

In questo contesto stiamo parlando più precisamente di *azioni continue di gruppi discreti*. Vogliamo vedere delle proprietà di queste azioni e vedere che relazioni ci sono fra di loro.

2.7.3 Definizione : Siano $A, B \subset X$, Il *trasportatore di A in B* è $(A|B)_G = \{g \in G \mid gA \cap B \neq \emptyset\}$.

Sia G un gruppo che agisce per omeomorfismi su uno spazio topologico X come detto dalla proposizione 2.7.3. Vediamo cinque proprietà di questa azione :

P_1) $\Gamma : G \times X \longrightarrow X \times X$ tale che $\Gamma((g,x)) = (x, gx)$ è continua e propria (detta anche *azione propria*).

P_2) Per ogni $K \subset X$ compatto, $(K|K)_G$ è finito.

P_3) Per ogni $x, y \in X$ esiste $x \in U$ e $y \in V$ intorni tale che $(U|V)_G$ è finito.

V) er ogni $x \in X$ esiste un intorno $x \in U$ tale che $(U|U)_G =$ è finito (detta *azione vagante*).

VL) Per ogni $x \in X$ esiste un intorno $x \in U$ tale che $(U|U)_G = \{e\}$ identità di G (detta *azione libera*).

2.7.4 Definizione : Una azione è *libera* se per ogni $x \in G$ e per ogni $g \in G$ si ha che $gx = x \Longleftrightarrow g = e$.

2.7.5 osservazione : ($P_3 \Longrightarrow V$) Sia $x \in X$ e consideriamo $x = y$ quindi esistono U' e V' intorni di x tali che $(U'|V')_G$ è finito, ora $x \in U' \cap V'$ è intorno e $g(U' \cap V') \cap (U' \cap V') \subset U' \cap V'$, quest'ultimo è non vuoto per un nuemro finito di g quindi $(U' \cap V' | U' \cap V')_G$ è finito. L'implicazione inversa è falsa.

Ora vediamo le relazioni fra le cinque proprietà scritte prima.

2.7.5 Teorema : Supponiamo che X sia T_2. Allora l'azione è libera e vale $V \Longleftrightarrow$ vale VL.

Dimostrazione :

($VL \Longrightarrow V+$ azione libera) Se vale VL allora per ogni $x \in X$ esiste $x \in U$ intorno tale che $gU \cap U$ solo se $g = e$ in particolare vale solo per un numero finito di $g \in G$, mostriamo ora che l'azione è libera. Si ha che per ogni $x \in X$ vale $gx = x$ solo se $g = e$, allora per ogni $g \in G/\{e\}$ vale $gx \neq x$ quindi l'azione è libera.

($V+$ azione libera $\Longrightarrow VL$) Sia $x \in X$ e sia $x \in U$ intorno tale che $gU \cap U \neq \emptyset$ solamente per finiti $g \in G$, inoltre $gx = x$ solo se $g = e$. Consideriamo ora $g \neq e$ e siano $g_1, \cdots, g_n$ tali che $g_i U \cap U \neq \emptyset$ con $x \in U$ intorno $\Longrightarrow g_i x \neq x$ per ogni $i \leq n$ quindi, siccome X è T_2, esistono $x \in U_i$ e $g_i x \in V_i$ intorni tale che $U_i \cap V_i = \emptyset$. Consideriamo ora $U' = U \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1} V_i$ che è un intorno di x, mostriamo che $gU' \cap U' = \emptyset$ per ogni $g \neq e$. Se $gU \cap U = \emptyset \Longrightarrow gU' \cap U' \subset gU \cap U = \emptyset$, se $g \neq e$ e $gU \cap U \neq \emptyset \Longrightarrow g = g_i$ per qualche $i \leq n$ allora $gU' \cap U' = g_i U' \cap U' \subset U_i \cap V_i = \emptyset$.

□

2.7.6 Teorema : Supponiamo che X sia T_2 e localmente compatto. Allora $P_1 \Longleftrightarrow P_2 \Longleftrightarrow P_3$ (Per essere precisi se X è T_2 allora $P_1 \Longleftrightarrow P_2$ e se X è localmente compatto allora $P_2 \Longleftrightarrow P_3$).

Dimostrazione :

($P_1 \Longrightarrow P_2$) Sia $K \subset X$ compatto, assumiamo che Ψ sia propria, allora $K \times K \subset X \times X$ è compatto e $\Gamma^{-1}(K \times K) \subset G \times X$ è compatto. Sia $p : G \times X \longrightarrow G$ la proiezione su G, siccome p è continua si ha che $p(\Gamma^{-1}(K \times K))$ è compatto quindi ha cardinalità finita perchè G ha la topologia discreta. Ora $\Gamma^{-1}(K \times K) = \{(g, x) \mid x \in K,\ gx \in K\} \Longrightarrow p(\Gamma^{-1}(K \times K)) = \{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\} = (K|K)_G$.

($P_2 \Longrightarrow P_3$) Uso che X è localmente compatto, dunque per ogni $x, y \in X$ esistono $x \in K_1$ e $y \in K_2$ intorni compatti quindi $K_1 \cup K_2$ è compatto e per la proprietà 2 si ha che $(K_1 \cup K_2 | K_1 \cup K_2)_G$ è finito, ma $gK_1 \cap K_2 \subset g(K_1 \cup K_2) \cap (k_1 \cup K_2) \Longrightarrow (K_1|K_2)_G$ è finito.

($P_3 \Longrightarrow P_1$) Uso che X è T_2. Sia $L \subset X \times X$ compatto allora L è chiuso quindi, per continuità, $\Gamma^{-1}(L) \subset G \times X$ è chiuso, Voglio far vedere che esiste un compatto $K \subset X$ e un insieme finito $G_0 \subset G$ tale che $\Gamma^{-1}(L) \subset G_0 \times K$ cosichè, siccome $G_0 \times K$ è compatto e $\Gamma^{-1}(L)$ è un chiuso dentro il compatto $G_0 \times K$, si conclude che $\Gamma^{-1}(L)$ è compatto. Consideriamo $p_1 : X \times X \longrightarrow X$ la proiezione sulla prima coordinata e sia $K = p_1(L)$, questo è compatto di X perchè p_1 è continua. Dato $(x, y) \in X \times X$ esistono $x \in U_x$ e $y \in U_y$ intorni aperti tale che $(U_x|U_y)_G$ è finito, osserviamo che $L \bigcup_{(x,y) \in L} U_x \times U_y$ è ricoprimento aperto, ma L è compatto quindi posso estrarre un sotto ricoprimento finito $L \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \times U_{y_i}$. Poniamo ora $G_0 = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i}|U_{y_i})_G$ che è finito perché unione finita di trasportatori finiti per ipotesi quindi $\Gamma^{-1}(L) \subset G_0 \times K$ infatti sia $(g, x) \in \Gamma^{-1}(L) \Longrightarrow (x, gx) \in L \Longrightarrow x \in K$ e $g \in G_0$ (perché $(x, gx) \in L \Longrightarrow (x, gx) \in U_{x_i} \times U_{y_i}$ per qualche $i \Longrightarrow gU_{x_i} \cap U_{y_i} \neq \emptyset \Longrightarrow g \in (U_{x_i}|U_{y_i})_G \subset G_0$).
$\square$

2.7.2 esercizio :

1) Se l'azione è libera e vale V allora vale VL.

2) se vale V allora vale P_3 se e solo X/G è T_2.

2.7.7 esempio : Sia $G = \mathbb{Z}$ e $X = \mathbb{R}^2/\{0\}$, vediamo che in questo caso $V \not\Longrightarrow P_3$, infatti consideriamo l'azione $n \cdot (x, y) = (2^n x, 2^n y)$, questa soddisfa la proprietà V (vedi per esercizio). Vediamo che non soddisfa la P_3; siano U, V intorni rispettivamente di $(0, 1)$ e $(1, 0)$, voglio vedere che $gU \cap V \neq \emptyset$ per infiniti $g \in G$. Esiste u n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha che $(2^{-n}, 1) \in U$ e $(1, 2^{-n}) \in V$, ora $n \cdot (2^{-1}, 1) = (1, 2^{-n}) \Longrightarrow (n \cdot U) \cap V \neq \emptyset$ per ogni $n \geq n_0$. Ora vediamo che X/G non è T_2; se U, V, di prima, sono intorni saturi allora $U \cap V = gU \cap V \neq \emptyset$ per ogni $g \in G$ dunque X/G non è T_2.

2.7.5 Definizione : Una azione del tipo descritto dal teorema 2.7.6 è detta *propria*.

2.7.4 Proposizione : Sia X di Hausdorff, allora $P_1 \Longleftrightarrow P_2$.

Dimostrazione : Abbiamo visto nel teorema 2.7.6 che se X è T_2 e localmente compatto allora $P_1 \Longleftrightarrow P_2$, mostriamo adesso che è sufficiente solo che X sia di Hausdorff. Abbiamo già dimostrato che $P_1 \Longrightarrow P_2$ quindi dimostriamo $P_2 \Longrightarrow P_1$. Supponiamo che valga

P_2 e sia $L \subset X \times X$ compatto, mostriamo che $\Gamma^{-1}(L)$ è compatto così si ha che l'azione è propria, dove Γ è l'appicazione definita in P_1. Consideriamo le proiezioni sulle coordinate $p_1, p_2 : X \times X \longrightarrow X$ tale che $P_1((a,b)) = a$ e $p_2((a,b)) = b$. Sia ora $K = p_1(L) \cup p_2(L)$, questo è compatto perché le proiezioni sono continue e siccome L compatto allora $p_i(L)$ compatto e K è unione di compatti quindi è compatta. Quindi $L \subset K \times K \Longrightarrow \Gamma^{-1}(L) \subset \Gamma^{-1}(K \times K)$, ma L è compatto in spazio T_2 quindi è chiuso poi Γ è continua quindi $\Gamma^{-1}(L)$ è chiuso. Resta da mostrare che $\Gamma^{-1}(K \times K)$ è compatto così si ha che $\Gamma^{-1}(L)$ è compatto. Ora $\Gamma^{-1}(K \times K) = \{(g,x) \mid x \in K,\ gx \in K\} = \{(g,x) \mid x \in K \cap g^{-1}K\}$, poi sia $p_G : G \times X \longrightarrow G$ la proiezione allora sia $G_0 = p_G(\Gamma^{-1}(K \times K)) = \{g \in G \mid K \cap g^{-1}K \neq \emptyset\} = \{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ che per P_2 è un sotto-insieme finito di $G \Longrightarrow \Gamma^{-1}(K \times K) \subset G_0 \times K$ che 'e compatto quindi $\Gamma^{-1}(K \times K)$ è compatto.

$\square$

2.7.7 Teorema : Supponiamo che X sia T_2 e che valga la proprietà V. Allora vale la proprietà P_3 se e solo se X/G è T_2.

Dimostrazione : Abbiamo già visto nel teorema 2.7.3 che se vale P_3 allora il quoziente X/G è T_2, quindi vediamo che se X/G è T_2 allora vale P_3. Bisogna vedere che per ogni $x, y \in X$ esistono $x \in U$ e $y \in V$ intorni tale che $gU \cap V \neq \emptyset$ solo per finiti $g \in G$, supponiamo che $Gx \neq Gy$ (le orbite sono diverse), allora siccome X/G è T_2, esistono $U, V \subset X$ aperti saturi, quindi G-stabili, tali che $x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset$ e inoltre $gU \cap V = U \cap V = \emptyset$ per ogni $g \in G$. Se invece $Gx = Gy$ (uso che l'azione è vagante) assumo $y = hx$ con $h \in G$ allora per la proposizione 2.7.4, esiste $x \in U$ intorno tale che $gU \cap U \neq \emptyset$ solo per finiti $g \in G$, considero allora $V = hU \ni y$ intorno, si ha che $gU \cap V = gU \cap hU = h(h^{-1}gU \cap U)$ e $h^{-1}gU \cap U \neq \emptyset$ solo per finiti $h^{-1}g \in G$ quindi $gU \cap V$ solo per finiti $g \in G$.

$\square$

2.7.6 Definizione : Una azione è *propriamente discontinua* se vale la proprietà VL.

2.7.6 osservazione : La definizione 2.7.6 è contestata nel senso che alcuni intendono per propriamente discontinuo azioni in cui vale la proprietà P_2 o la proprietà P_3. Discontinuo fa riferimento al fatto che la topologia su G è discreta.

2.7.7 osservazione : Sia $G \longrightarrow Homeo(X)$ l'azione di G tramite omeomorfismi su X, ricordiamo che un dominio fondamentale è un chiuso $D \subset X$ tale che :

1) $D^\circ \neq \emptyset$ (in generale $D = \bar{D^\circ}$).

2) $gD^\circ \cap hD^\circ \neq \emptyset \Longleftrightarrow g = h,\ (g, h \in G)$.

3) Il ricoprimento $\{gD\}_{g\in G}$ di X è localmente finito ovvero per ogni $x \in X$ esiste $x \in U$ intorno tale che $gU \cap U \neq \emptyset$ solo per finiti $g \in G$.

2.7.5 Proposizione : Se esiste D dominio fondamentale allora l'azione è propria nel senso della proprietà P_2 ovvero per ogni $K \subset X$ compatto si ha $gK \cap K$ solo per finiti $g \in G$.

Dimostrazione : Per ogni $x \in X$, siccome è localmente finito (da vedere), esiste $x \in U_x$ aperto tale che $U_x \cap gD \neq \emptyset$ solo per finiti $g \in G$. Sia K compatto allora $K \subset \bigcup\limits_{x\in K} U_x \Longrightarrow$ esistono $x_1, \cdots, x_n$ tale che $K \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} \subset g_1 D \cup \cdots g_N D$ dove $K \cap gD \neq \emptyset \Longleftrightarrow g \in \{g_1, \cdots, g_N\}$, vediamo che $gK \cap K$ solo per finiti $g \in G$. Sia $x \in K$ e $g \in G$ tale che $gx \in K \Longrightarrow gx \in g_i D$ per qualche $i \leq N \Longrightarrow x \in g^{-1} g_i D$ dunque $g^{-1} g_i D \cap K \neq \emptyset \Longrightarrow g^{-1} g_i D = g_j D$ per qualche $j \leq N \Longrightarrow g^{-1} g_i D^\circ = g_j D^\circ \Longrightarrow g^{-1} g_i = g_j \Longrightarrow g = g_i g_j^{-1}$, dunque siccome i g_i sono finiti ho finiti modi di avere $g \in G$.

□

2.7.8 esempio : (importante azione propria) Sia $G = SL(2,\mathbb{Z})$ che agisce su $X = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Imm(z) > o\}$ in questo modo : $M \cdot z = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$, vediamo che $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}$. Osserviamo che $Imm(\frac{az+b}{cz+d}) = \frac{Imm(z)}{|cz+d|^2} > 0$ infatti $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(cz-d)}{|cz+d|^2} \Longrightarrow Imm(\frac{(az+b)(cz-d)}{|cz+d|^2}) = (ad-bc)\frac{Imm(z)}{|cz+d|^2} = det(M)\frac{Imm(z)}{|cz+d|^2} = \frac{Imm(z)}{|cz+d|^2} > 0$. Infine osserviamo che $cz + d = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{smallmatrix} cx+d=0 \\ cy=0 \end{smallmatrix}\right. \Longleftrightarrow (c,d) = (0,0)$ dove $z = x + iy$, vediamo che l'azione è propria, basta vedere che ha la proprietà P_2 ovvero che per ogni compatto $K \subset \mathbb{H}$ si ha che $gK \cap K$ solo per finiti $g \in SL(2\mathbb{Z})$. Sia $K \subset \mathbb{H}$ compatto allora $K \subset \mathbb{C} \Longrightarrow$ è chiuso e limitato quindi esiste $\epsilon > 0$ tale che $Imm(z) > \epsilon$ per ogni $z \in K$. Fissiamo $z \in \mathbb{H}$, considero $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $q((c,d)) = |cz+d|^2$, q definisce una forma quadratica (definita positiva) ovvero il grafico di q è un paraboloide, come in figura

(Figura 44)

Dunque se $q((c,d))N_z = \frac{Imm(z)}{\epsilon} \Longrightarrow (c,d)$ è fuori da un disco $B_0(R(z))$ quindi per ogni $z \in \mathbb{H}$ fissato esiste $R(z)$ tale che $\frac{Imm(z)}{|cz+d|^2} > \epsilon \Longrightarrow |c|,\ |d| < R(z)$, infatti osserviamo che $R : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione continua. Sia $R_K = \underset{z\in K}{Max} R(z)$, sia $z \in K$ e sia $g \in SL(2\mathbb{Z})$ tale che $gz \in K \Longrightarrow Imm(gz) = \frac{Imm(z)}{|cz+d|^2} > \epsilon$ perché $gz \in K \Longrightarrow |c|, |d| < R(z)$ (ricordiamo che $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$) dunque la seconda riga di g ammette un numero finito di possibilità, vediamo che anche la prima riga ammette un numero finito di possibilità. Sia $g_1, g_2 \in SL(2,\mathbb{Z})$ con la stessa seconda riga tali che $g_i K \cap K \neq \emptyset$, e definiamo $g_0 = g_2 g_1^{-1} \Longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} d & -b_1 \\ -c & a_1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dove il penultimo uguale è dovuto al fatto che ogni termine è diviso dal determinante della matrice che è 1 e $n = -a_2 b_1 + b_2 a_1$. ora $\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z = z + n$ quindi g_0, in termini di azione è una traslazione. Ora $g_2 K \cap K = g_0 g_1 K \cap K = (g_1 K + n) \cap K \Longrightarrow n$ ammette un numero finito di possibilità (da vedere) quindi dato g_1 ho solo finite possibilità di $g \Longrightarrow$ l'azione è propria e inoltre $\mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})$ è T_2 (da vedere l'ho messo io). Mi chiedo ora chi sia il quoziente al livello visivo. Possiamo determinare un dominio fondamentale per l'azione e usare il fatto che in questo caso vale che $X/G \cong D/G$. Consideriamo $D = \{z \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} \leq Re(z) \leq \frac{1}{2},\ |z|\}$ come in figura

(Figura 45)

Consideriamo ora l'azione $Phi : SL(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow Homeo(\mathbb{H})$, L'immagine di Φ è generata da queste due applicazioni $\gamma_1(z) = z+1$ e $\gamma_2(z) = -\frac{1}{z}$ rappresentate rispettivamente dalle matrici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e agiscono su D come in figura :

(Figura 46)

γ_1 trasla D e γ_2 lo rimpicciolisce. Ora $\mathbb{H}$ è omeomorfo al disco unitario tramite $\psi(z) = \frac{z-1}{z+1}$, vediamo quindi il quoziente. γ_1 identifica i lati verdicali di D e γ_2 l'arco di circonferenza, quello che esce è un cono (da vedere fai disegno se vuoi Figura 47) che è omeomorfo a $\mathbb{C}$ dunque $\mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z}) \cong D/SL(2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}$.

2.7.3 esercizio : Verificare che $SL(2\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ definisce un omomorfismo di gruppi $SL(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow Homeo(\mathbb{H})$.

2.7.4 esercizio : Sia $f : X \longrightarrow Y$ propria e continua con Y di Hausdorff e localmente compatto, e sia $Z \subset X$ chiuso e discreto. Allora $f(Z)$ è chiuso e discreto.

soluzione : Se f è propria con Y di Hausdorff e localmente compatto allora f è chiusa quindi $f(Z)$ è chiuso, vediamo che $f(Z)$ è discreto ovvero per ogni $z_0 \in Z$ esiste $U \subset Y$ intorno di $f(z_0)$ tale che $f(Z) \cap U = \{f(z_0)\}$. Sia $z_0 \in Z$ e sia $f(z_0) \in U$ intorno compatto (Y è localmente compatto) allora $f^{-1}(U)$ è compatto perch'e f è propria, allora $f^{-1} \cap Z$ è chiuso, compatto e discreto quindi è finito. Ora $f(f^{-1}(U) \cap Z) = U \cap f(Z)$ è finito perché immagine di un insieme finito quindi considero $U_0 = U/(f(Z)/f(z_0)$ è ancora intorno di $f(z_0)$ (in quanto ho levato solo un numero finito di punti)e $U_0 \cap f(Z) = \{f(z_0)\}$.

2.7.9 esempio : Se prendo $\mathbb{Q}$ con la topologia discreta e lo mando tramite f in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea si ha che f è continua ma $f(\mathbb{Q})$ non è chiuso e discreto in quanto f non è propria infatti se prendiamo il compatto $[a,b]$ di $\mathbb{R}$ allora $f^{-1}([a,b]) = [a,b] \cap \mathbb{Q}$ che non è compatto in $\mathbb{Q}$.

2.7.1 corollario : Sia $G \longrightarrow Homeo(X)$ un'azione propria con X di Hausdorff e localmente compatto. Allora per ogni $x \in X$ si ha che l'orbita $Gx \subset X$ è chiusa e discreta.

Dimostrazione : Intanto il gruppo G ha la topologia discreta, e consideriamo $\phi : G \times$

$X \longrightarrow X \times X$ tale che $\phi((g,x)) = (x, gx)$, questa mappa è continua e propria e $X \times X$ è di Hausdorff e localmente compatto. Ora sia $x \in X$ e consideriamo $G \times \{x\}$ che è chiuso e discreto in $G \times X \Longrightarrow$, per l'esercizio precedente, $\phi(G \times \{x\}x)$ è chiuso e discreto, ma $\phi(G \times \{x\}) = \{x\} \times Gx \subset X \times X \Longrightarrow Gx \subset X$ chiuso e discreto (con la proiezione).

$\square$

2.7.6 Proposizione : (Generalizza il corollario) Sia $G \longrightarrow Homeo(X)$ una azione vagante con X di Hausdorff. Allora per ogni $x \in X$ si ha che Gx è chiuso e discreto in X.

Dimostrazione : Per definizione ogni punto ha un intorno U tale che $U \cap gU \neq \emptyset$ solo per finiti $g \in G$. Sia U l'intorno della definizione e vediamo che $U \cap Gx$ è finito per ogni $x \in X$. Supponiamo che $U \cap Gx \neq \emptyset$ e che $x \in U$, supponiamo inoltre che $gx \in U \Longrightarrow x \in g^{-1}U \cap U \Longrightarrow g$ ha finite possibilità (da vedere). Vediamo che Gx è discreto; abbiamo $x \in U$ e siano $g_1, \cdots, g_n \in G$ tutti gli elementi per cui $g_i x \in U/\{x\}$ e siano $U_i \ni x$ e $V_i \ni g_i x$ intorni disgiunti. Consideriamo ora $U' = U \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1} V_i \ni x$ intorno, se $gx \in U'/\{x\} \Longrightarrow g = g_i \Longrightarrow g_i x \in U_i$ ma $x \in U_i$ assurdo perché $U_i \cap V_i = \emptyset$ e $g_i x \in V_i$, quindi $U' \cap Gx = \{x\}$ e perciò Gx è discreto. Vediamo che Gx è chiuso o anche che X/Gx è aperto; sia $y \in X/Gx$ e sia $U \in y$ intorno con le stesse proprietà della definizione sopra-enunciata allora $U \cap Gx$ è finito dunque $X/Gx \supset U/Gx \ni y$ è ancora intorno quindi X/Gx è aperto.

$\square$

2.7.7 osservazione : L'azione dell'esempio 2.7.4 punto 2 è propriamente discontinua ma non è propria.

2.7.10 esempio : (Esempio della teoria delle equazioni differenziali) Consideriamo il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x'(t)=cos^2(x(t)) \\ y'(t)=sin(x(t)) \end{cases}$$

che esprime la legge del moto di un punto sul piano $\mathbb{R}^2$ e la mia incognita è una funzione $\binom{x(t)}{y(t} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Osserviamo che $x_n(t) = \frac{\pi}{2} + n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ è una soluzione particolare dell'equazione $x'(t) = cos^2(x(t))$, se la sostituiamo nella seconda si ottiene che $y'(t) = sin(x_n(t)) = sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n \Longrightarrow y(t) = (-1)^n t + c$ con c costante, osserviamo che abbiamo ottenuto $\binom{\frac{\pi}{2}+n\pi}{y(t)=(-1)^n t+c}$ come soluzione particolare del sistema, e l'orbita di queste è fissa lungo l'asse delle ascisse e cresce o decresce, a seconda di n, lungo le ordinate come in figura

(Figura 43)

e queste sono le soluzione con dato iniziale $(\frac{\pi}{2} + n\pi, y_0)$ al variare di y_0 ed n (Il grafico rappresenta le soluzioni in termini $(x(t), y(t))$. Proviamo a trovare altre soluzioni, quindi se abbiamo come punto iniziale $(x_0, y_0) \neq (\frac{\pi}{2} + n\pi, y_0)$, osserviamo che possiamo scrivere la soluzione $y(t) = y(x(t))$ ovvero considerando $x(t)$ variabile e $y(x(t))$ l'incognita del sistema e inoltre osserviamo che $y(t) = sec(x(t)) + c$ risolve l'equazione $y'(t) = sin(x(t))$ infatti $y'(t) = (\frac{1}{cos(x(t))'} = \frac{sin(x(t))x'(t)}{cos(x(t))^2})$ ma per la seconda equazione $x'(t) = cos(x(t))^2$ si ha che $\frac{sin(x(t))x'(t)}{cos(x(t))^2}) = sin(x(t))$ quindi al variare di $x(t)$ si ha la soluzione del sistema $(x(t), y(t) = (x(t)y(x(t)) = (x(t), sec(x(t)) + c)$, osserviamo in figura come si sviluppano le soluzioni

(Figura 44)

Per continuità del flusso le frecce sono concordi a quelle delle soluzioni particolari. Ora voglio esprimere $x(t)$ consideriamo allora $x(t) = arctg(t + c) + n\pi$ e osserviamo che $x'(t) = cos^2(x(t)) \Longrightarrow x'(t) = (arctg(t+c)+n\pi)' = (\frac{1}{1+(t+c)})$ e anche $x'(t) = cos^2(arctg(t+c)+n\pi) = cos^2(arctg(t+c))$, voglio semplificare l'espressione $cos^2(arctg(t+c))$, consideriamo la figura

(Figura 45)

Dalla figura consideriamo i due triangoli, sono simili, quindi per proporzionalità si ha che $\frac{cos(\theta)}{1} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ e siccome $\theta = arctg(t) \Longrightarrow cos^2(arctg(t+c)) = (cos(arctg(t+c)))^2 = (\frac{1}{1+(t+c)}) = x'(t)$ quindi ho espresso la $x(t)$. Definiamo una azione $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $(t, (x, t)) \longmapsto t \cdot (x, y)$ che sarebbe la posizione all'stante t della pallina posta inizialmente in (x, y) al tempo $t = 0$. Questa è effettivamente una azione infatti $s \cdot (t \cdot (x, y)) = (s + t) \cdot (x, y)$, inoltre l'azione è continua. Ora restringiamo l'azione a $\mathbb{Z}$ quindi si ha $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, voglio vedere che questa azione è libera e vagante ma non propria. L'azione così definita agisce solo su le soluzioni ai punti iniziali $(\frac{\pi}{2} + n\pi, y_0)$ e quindi su le curve della Figura 43, da ciò si deduce subito che l'azione è libera infatti al variare di t la funzione cresce o decresce e quindi si ha che $t \cdot (x, y) = (x, y)$ solo se $t = e$. Vediamo che è vagante; dobbiamo trovare un intorno $U \ni (x, y)$ che non interseca nessun traslato $n \cdot U$ con $n \neq 0$. Fissiamo (x, y) su una curva (che sarà della forma $(\frac{\pi}{2} + n_0\pi, y))$ e tracciamo una curva T_0 che passa per (x, y) ed è ortogonale alle soluzioni (curve integrali) comprese le due soluzioni C_1 e C_2 come in figura

(Figura 46)

ora agisco sulla curva T_0, considero l'azione (rispetto a quella iniziale) $\frac{1}{3} \cdot T_0$ e $-\frac{1}{3} \cdot T_0$, le azioni precedenti rappresentano rispettivamente le curve $T_{\frac{1}{3}}$ e $T_{-\frac{1}{3}}$ che sono i punti della curva T_0 all'istante $t_1 = \frac{1}{3}$ e all'istante $t_2 = -\frac{1}{3}$ (e sono sempre ortogonali alle soluzioni tra C_1 e C_2), in altri termini l'azione ha traslato T_0 lungo il flusso quindi T_0 è stato traslato in alto da t_1 è i basso da t_2 come rappresentato in figura

(Figura 47)

e considero U la parte di piano compresa da $C_1,\ C_2,\ T_{\frac{1}{3}},\ T_{-\frac{1}{3}}$, ora se consideriamo l'azione ristretta (che stiamo studiando) questa agisce per $t \in \mathbb{Z}$ quindi $n \cdot U \cap U$ è vuoto e dunque il trasportatore $(U|U)_{\mathbb{Z}}$ è finito e quindi l'azione è vagante, osserviamo in figura come agisce $\mathbb{Z}$ su U

(Figura 48)

Infine concludiamo dimostrando che l'azione non è propria. Se l'azione fosse propria allora sono equivalenti le proprietà $P_1,\ P_2,\ P_3$, vediamo che in questo caso non valgono in particolare vediamo che non vale P_3 e quindi che esiste una coppia di punti per cui ogni coppia di intorni U, V il trasportatore $(U|V)_{\mathbb{Z}}$ è infinito. Consideriamo i punti $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ e $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e con intorni rispettivamente U è V come in figura

(Figura 49)

Sia $(-\frac{\pi}{2} + a, 0) \in U$ e $(\frac{\pi}{2} - a, 0) \in V$ e sia I_a il tempo che ci vuole per andare da $(-\frac{\pi}{2} + a, 0)$ a $(\frac{\pi}{2} - a, 0)$, osserviamo che man mano che n cresce $n \cdot U$ si muove lungo le curve seguendo il flusso e al tempo I_a si ha che $I_a U$ interseca V. Ora man mano che che a tende a 0 si ha che I_a tende ad infinito infatti sappiamo che $x(t) = arctg(t + c) \Longrightarrow t(x) = tg(x) - c \Longrightarrow I_a = 2tg(\frac{\pi}{2} - a)$, dunque per infiniti $n \in \mathbb{Z}$ si ha $n \cdot U \cap V \neq \emptyset$, quindi non è propria.

2.7.11 esempio : Consideriamo l'esempio precedente e consideriamo l'insieme $S = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, se considero la relazione di equivalenza $\sim$ tale che $(-\frac{\pi}{2}, y) \sim (\frac{\pi}{2, -y})$ ottengo un nastro di M$\acute{}$oebius infinito. Ora considero l'azione $\mathbb{R} \times S \longrightarrow S$ e la passo al quoziente, ovvero considero l'azione $\mathbb{R} \times S/\sim \longrightarrow S/\sim$. Questa è ben definita infatti $t \cdot (-\frac{\pi}{2}, y) = (-\frac{\pi}{2}, y - t)$ e $t \cdot (\frac{\pi}{2}, -y) = (\frac{\pi}{2}, t - y) \Longrightarrow t \cdot (-\frac{\pi}{2}, y) \sim t \cdot (\frac{\pi}{2}, -y)$, e l'azione è ancora continua, basta considerare il diagramma

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi_t"] \arrow[d] \arrow[dr, "\phi'_t"] & S \arrow[d] \\ S/\sim \arrow[r, "\tilde{\phi_t}"] & S/\sim \end{tikzcd}$$

. Ora restringiamo a $\mathbb{Z}$ l'azione passata al quoziente, allora le orbite sono ancora chiuse e discrete quindi l'azione è ancora libera ma non è vagante infatti, similmente al ragionamento dell'esempio precedente riguardo il fatto che l'azione fosse propria, si ha che per ogni $U \ni [-\frac{\pi}{2}, 0] = [\frac{\pi}{2}, 0]$ intorno, esistono infiniti $n \in \mathbb{Z}$ si ha $n \cdot U \cap U \neq \emptyset$, Dunque l'azione è libera e ha orbite chiuse e discrete ma non è propriamente discontinua. (da vedere dice che è prop. disc. se è libera nella def.)

2.8 Spazi N1 e N2

Vogliamo definire la spazio topologico in funzione di un altro concetto, il concetto di successione, dietro questo concetto c'è un'altro concetto senza il quale non si potrebbe parlare di successioni, ovvero la numerabilità. Abbiamo definito precedentemente il punto aderente come un punto tale che ogni suo intorno ha intersezione non vuota con lo spazio, nella scia di questo abbiamo definito il punto di accumulazione come un punto tale che ogni suo intorno ha intersezione non vuota e diversa dal punto stesso con lo spazio e il punto limite come quel punto tale che esiste una successione ed un intorno dove definitivamente la successione è contenuta. Potrei definire punto di accumulazione come quel punto tale che per ogni intorno del punto ed ogni $N \in \mathbb{N}$ esiste $n > N$ tale che esiste una successione tutta contenuta nell'intorno definitivamente dopo n, quindi dietro il punto di accumulazione ci stanno le successioni una tale successione per poter convivere negli intorni di un punto è importante che il sistema fondamentale di intorni di quel punto sia numerabile. Premettiamo una definizione :

2.8.1 Definizione : Una *invasione in compatti* di uno spazio X è un insieme numerabile di compatti che ricopre X.(da vedere)

Assiomi di numerabilità.

2.8.2 Definizione : Sia X uno spazio topologico. Si dice N_1 se ogni $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

2.8.3 Definizione : Sia X uno spazio topologico. Si dice N_2 se ha una base numerabile.

2.8.1 osservazione : $N_2 \implies N_1$, infatti se ha una base numerabile, l'insieme degli elementi della base che interseca un punto è un sistema fondamentale di intorni per quel punto che è per forza numerabile dato che è un sottoinsieme di un insieme numerabile.

2.8.1 esempio : Abbiamo visto che l'identificazione ad un punto di $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dell'esempio 1.5.3, non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile nel punto $\omega = \pi(\mathbb{Z})$, quindi non ammette una successione che converge a quel punto.

2.8.2 esempio : $\mathbb{R}$ non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile in $\mathbb{R}^2$ infatti supponiamo per assurdo che abbia un sistema fondamentale di intorni numerabile e consideriamo un invasione in compatti di $\mathbb{R}$, di conseguenza ogni compatto ha un sistema fondamentale di intorni numerabile, ogni compatto quindi ha una lista numerabile di intorni e con il processo diagonale di Cantor(da vedere) trovo un intorno di $\mathbb{R}$ che non contiene nessun intorno del sistema fondamentale assurdo.

2.8.1 Proposizione : $\mathbb{R}^n$ è N_2.

Dimostrazione : Voglio dire che l'insieme numerabile delle palle $B(\bar{q}, \frac{1}{2^n})$, dove $\bar{q}$ è un vettore di razionali, è una base numerabile. Consideriamo un aperto U, siccome è aperto, per ogni $x \in U$ esiste una palla di centro in x e raggio $\frac{1}{2^n}$, con n opportuno, contenuta in U. Consideriamo ora un razionale $\bar{q}$ all'interno di $B(x, \frac{1}{2^n})$, so che $d(x, \bar{q}) < \frac{1}{2^n}$, considero ora la palla $B(\bar{q}, r - d(x, \bar{q}))$ questa è tutta contenuta in $B(x, \frac{1}{2^n})$ ed ogni suo punto y è tale che $d(y, \bar{q}) < d(y, x) + d(x, \bar{q}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ quindi la palla $B(\bar{q}, \frac{1}{2^n})$ è tutta contenuta in $B(x, \frac{1}{2^n})$ e questo vale per ogni $\bar{q}$ quindi $B(x, \frac{1}{2^n})$ è unione di elementi della base e U è ricoperto da $B(x, \frac{1}{2^n})$ che unione di $B(\bar{q}, \frac{1}{2^n})$ quindi è una base. (da vedere)

□

2.8.4 Definizione : Sia X spazio topologico. Si dice *separabile* se e solo se contiene un insieme numerabile e denso.

2.8.2 esempio : $\mathbb{R}^n$ è separabile.

2.8.2 osservazione : Se X è N_2 allora è separabile, infatti ha una base numerabile, costruisco un insieme prendendo un punto da ogni elemento della base, questo insieme è per costruzione numerabile inoltre è denso perché per costruzione interseca ogni aperto.

2.8.3 osservazione : Se X è spazio metrico e separabile allora è N_2 infatti per ogni aperto U e ogni $x \in U$ esiste un punto $x' \in A$, A denso e numerabile, arbitrariamente vicino ad x, quindi esiste una palla con centro x' e raggio ϵ che contiene x, ma $x' \in A \cap U$, A numerabile quindi U è unione numerabile di palle con centro negli x' e raggio ϵ. (da vedere)

2.8.1 Teorema : (Haine-Cantor-Borel) Un insieme numerabile contenuto in un compatto ha un punto di accumulazione.

Dimostrazione : Considero una successione a_n e considero gli insieme $C_m\{a_n \mid n \geq m\}$, quesi sono chiusi, siccome sono contenuti in un compatto sono a loro volta compatti, allora $\bigcap C_m \neq \emptyset$ ed è un punto di accumulazione. Che sia di accumulazione è ovvio, supponiamo allora che l'intersezione sia vuota, allora gli insiemi X/C_m sono aperti e sono un ricoprimento aperto del compatto, quindi esiste un sotto ricoprimento finito quindi $X = \bigcup X/C_i = X/\bigcap C_i$ per un numero finito di i ovvero l'intersezione finita dei C_i è vuota ma è assurdo, vorrebbe dire che a_n non esiste per $n > max(i)$.

□

2.8.4 osservazione : Ogni successione ha un punto di accumulazione.

2.8.5 Definizione : Una $sotto-successione$ è la composizione di una successione per una funzione crescente.

2.8.5 osservazione : Sia a_n una successione e a_{n_m} una sua sotto-successione, allora un punto limite per a_{n_m} è di accumulazione per a_n.

2.8.6 osservazione : Sia a_n una successione in un compatto. Allora esiste una sotto-successione che converge al punto di accumulazione di a_n infatti considero un sistema fondamentale di intorni numerabile $U_1,\ U_2,\ dotsm$ e considero la successione $U_1,\ U_1 \cap U_2,\ U_1 \cap U_2 \cap U_3,\ \cdots$ allora i punto della successione che stanno in questo nuovo sistema di intorni sono una sua sotto-successione e convergono al punto di accumulazione.
2.8.6 Definizione : (da vedere) definire successione di Cauchy.

2.8.2 Proposizione : Un insieme è compatto se e solo se ogni successione ha una sotto-successione convergente.

Dimostrazione : (da vedere) Se trovo una successione che non ha una sotto successione che converge per ogni unione finita di aperti del compatto allora la successione non converge mai quindi diverge e non posso ricoprire una successione divergente contenuta in un compatto con un insieme finito di aperti, assurdo.

□

2.8.7 osservazione : Si può definire una topologia con le successioni (come? da vedere).

2.8.7 Definizione : Se ogni successione di Cauchy di X converge si dice che X è *completo*.

2.8.8 osservazione : $\mathbb{R}^n,\ \mathbb{C}^n$ sono completi.

2.8.3 Proposizione : Una successione di Cauchy in un compatto è convergente(da vedere).

Dimostrazione : considero una successione di Cauchy, ha un punto di accumulazione e quindi ha una sotto-successione convergente in quel punto ma definitivamente la successione si comporta come la sua sotto-successione(da vedere) quindi converge al punto di accumulazione. (quindi un compatto è completo?).

□

2.8.2 Teorema : L'intersezione di aperti densi di uno spazio X è non vuota se e solo se X è completo.

Dimostrazione :(da vedere)

□

2.8.1 Corollario : (da vedere) Supponiamo che X sia unione di compatti, e considero delle funzioni che hanno delle proprietà su questi compatti, questi insiemi di funzioni sono aperti e se X è completo l'intersezione di questi insiemi è un insieme non vuoto dove una funzione ha la prorpietà delle funzioni precedenti ma estesa a tutto X.

2.8.9 osservazione :(da vedere) Se considero l'insieme delle funzioni esclusivamente C_0 in un compatto, l'intersezione mi da delle funzioni esclusivamente C_0 su tutto X.

2.8.8 Definizione : X si dice *localmente compatto* se ogni x ammette un intorno compatto.

2.8.10 osservazione : (da vedere) Sia X localmente compatto e N_2 allora ogni aperto ha chiusura compatta infatti considero un ricoprimento di questo aperto , localmente è compatto quindi esiste un sotto ricoprimento finito (e considero la sua chiusura), siccome X è N_2 ho ricoperto ha un insieme numerabile di intorni quindi la chiusura del'aperto è unione di aperti localmente compatti quindi è unione finita...(da vedere)

2.8.4 Proposizione : Sia $p \in \mathbb{C}[z]$ dove $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ è un funzione polinomio non cotante. Allora $p(z)$ è propria.

Dimostrazione : Sia $K \subset \mathbb{C}$ compatto, dobbiamo vedere che la sua preimmagine è compatta ovvero chiusa e limitata. Innanzi tutto $p^{-1}(K)$ è chiuso per continuità di p, ora supponiamo che $\pi^{-1}(K)$ non sia limitato allora esiste una successione $\{z_n\} \subset p^{-1}(K)$ tale che per $n \longrightarrow +\infty$ si ha $|z_n| \longrightarrow +\infty$. Scrivo $p(z) = z^m(a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^m})$ dove $m = deg(p) > 0$, ma allora $|p(z_n)| \leq |z^m|(|a_m| + \frac{|a_{m-1}|}{|z_n|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|z_n^m|})$ e per $n \longrightarrow +\infty$ si ha che $|p(z_n)| \longrightarrow +\infty$ contraddicendo che K sia compatto dato che $p(z) \subset K$, quindi p è propria. (da vedere forse dovrei trovare l'uguale o il maggiore uguale invece del minore uguale)

□

2.8.5 Proposizione : Sia $p \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_N]$ non costante tale che $p : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione polinomio. Allora p è propria se e solo se $N = 1$.

Dimostrazione : Un verso l'abbiamo già visto, dobbiamo solo verificare che se p è propria allora $N = 1$. Supponiamo allora $N > 1$, studiamo innanzi tutto il caso di $N = 2$ quindi $p(z_1, z_2) \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$, Voglio dire che $p^{-1}(0)$ è illimitato e quindi p non è propria. Fissiamo in $\lambda \in \mathbb{C}$ qualsiasi eccetto un numero finito che vedremo dopo, se dimostro che $p(z_1, \lambda) = 0$ ammette soluzione allora ho finito infatti se ammette soluzione esiste $\mu \in \mathbb{C}$ tale che $p(\mu, \lambda) = 0$ e in particolare $(\mu, \lambda) \in p^{-1}(0)$ ma la norma $|(\mu, \lambda)| > |\lambda|$ e siccome λ lo scelto arbitrario, eccetto un numero finito di casi, lo posso avere arbitrariamente grande e quindi rendermi illimitato $p^{-1}(0)$. Supponiamo ora che $p(z_1, z_2) = \sum a_{ij} z_1^i z_2^j$ allora $p(z_1, \lambda) = \sum a_{ij} \lambda^j z_1^i = \sum_i (\sum_j a_{ij} \lambda^j) z_1^i = \sum_i q_i(\lambda) z_i^i$ dove $p(z_1, \lambda)$ è un polinomio in una variabile z_1 a coefficienti in $\mathbb{C}$ e i $q_i(z_2)$ sono polinomi in una variabile z_2 a coefficienti in $\mathbb{C}$. Sappiamo che per il teorema fondamentale dell'algebra che un polinomio non costante a coefficienti in $\mathbb{C}$ ammette sempre una radice, ora $p(z_1, \lambda)$ non ha radici se e solo se è costante e non identicamente nullo, d'altra parte $p(z_1, \lambda)$ è costante se e solo se $q_i(\lambda) = 0$ ovvero se e solo se λ è radice di ogni q_i, siccome $p(z_1, \lambda)$ è un polinomio i q_i sono un numero finito di polinomi quindi le radici comuni sono in numero finito, in conclusione se io scelgo arbitrariamente $\lambda \in \mathbb{C}$ escludendo le radici comuni dei q_i allora $p(z_1, \lambda)$ ha soluzione in particolare la sua norma diverge perché λ lo posso scegliere arbitrariamente grande dato che ho escluso solo un numero finito di complessi, e quindi p non è propria dato che 0 è compatto e $p^{-1}(0)$ no. Supponiamo ora $N > 2$, voglio vedere che $p^{-1}(z)$ non è compatto, e siccome il punto z lo è avrei la tesi. considero $(a_1, \cdots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ e sia $p_0 = p((a_1, \cdots, a_N)) \in Imm(p)$, considero allora il polinomio $q(z_1, z_2) = p((z_1, z_2, a_3, \cdots, a_N)) - p_0 \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$, ora p è costante se e solo se q è identicamente nullo ma per quanto detto prima nel caso $N = 2$ eccetto un numero finito di casi posso trovare $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ tale che $q(\mu, \lambda) = 0$ e tali che l norma di $p^{-1}(\mu, \lambda, a_3, \cdots, a_N)$ sia illimitata rendendolo così non compatto e dato che p_0 è compatto p non è propria e si ha la tesi. □

2.8.3 esempio : Sia $p(z_1, \cdots, z_N) = z_1$ allora $p^{-1}(0) \cong \mathbb{C}^{N-1}$, 0 è compatto ma $\mathbb{C}^{N-1}$ no quindi p non è propria.

2.8.4 esempio : Il caso reale della proposizione precedente è ben più complesso, consideriamo $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ tale che $p(x_1, x_2) = x_1$. Sia ha che $p^{-1}(0) = \mathbb{R}$ ch non è compatto quindi p non è propria. Similmente si ha $p(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ quindi $p^{-1}(b)$ sono circonferenze di raggio $\sqrt{b}$ e $p^{-1}([a, b])$ è una corona circolare di raggio a, b che è compatta quindi p è propria.

(definizione da vedere : Un spazio è completo se e solo se ogni successione di Cauchy converge, il completamento di uno spazio è lo spazio più tutti i punti limite di ogni successione di Cauchy)

2.9 Esercizi

2.9.1 esercizio : Sia $f : X \longrightarrow Y$ chiusa e surgettiva con fibre compatte e X sia a base numerabile. Allora Y è a base numerabile.

soluzione : f è chiusa quindi posso associare ad ogni aperto di X un aperto di Y infatti se $A \subset X$ aperto allora $A' = Y/f(X/A) = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset A\}$ è aperto di Y. Sia $\mathscr{B}$ una base numerabile di X e definiamo $\mathscr{A}$ come la famiglia delle unioni finite di elementi di $\mathscr{B}$ quindi $\mathscr{A}$ è una famiglia di aperti di X ed è una base numerabile perché le unioni sono finite. Sia $\mathscr{B}' = \{A' \mid A \in \mathscr{A}\}$ con $A' = Y/f(X/A)$ definito come sopra, questa è una famiglia numerabile di aperti di Y perché $\mathscr{A}$ è numerabile, vediamo che è base. Sia $y \in U \subset Y$, allora $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{B \in B_I} B$ con $B_I \subset \mathscr{B}$, ora $f^{-1}(y)$ è compatta e $f^{-1}(y) \subset \bigcup\limits_{B \in B_I} B \implies f^{-1}(y) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ con $B_i \in B_I$. Sia $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \subset f^{-1}(U)$ siccome A è unione finita di elementi di $\mathscr{B} \subset \mathscr{A} \implies A \in \mathscr{A}$ e $f^{-1}(y) \subset A \implies y \in A' \subset U$ quindi ho trovato un aperto che contiene y è sta in U quindi $U = \bigcup\limits_{A' \in \mathscr{B}'} A'$ e quindi ogni aperto è unione di elementi di $\mathscr{B}'$ quindi $\mathscr{B}'$ è base.

2.9.1 esempio : Consideriamo l'esercizio precedente e togliamo l'ipotesi che le fibre sono compatte. Consideriamo la contrazione di $\mathbb{Z}$ ad un punto e sia $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la proiezione al quoziente. p è surgettiva, se $C \subset \mathbb{R}$ chiuso $\implies p(C)$ è chiuso se e solo se $p^{-1}(p(C))$ è chiuso (per la topologia quoziente), ma $p^{-1}(p(C)) = C \cap \mathbb{Z}$ chiuso e saturo dunque p è chiusa. p non ha fibre compatte e $\mathbb{R}$ è a base numerabile ma $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no (lo abbiamo visto nell'esempio 1.5.3), non è neanche N_1 (da vedere neanche N_2) quindi abbiamo trovato una applicazione chiusa e surgettiva tra uno spazio a base numerabile ed uno non N_1 quindi dimostra la necessarietà dell'ipotesi delle fibre compatte dell'esercizio precedente.

2.9.1 Definizione : X si dice T_3 se dati $C \subset X$ chiuso e $y \in X/C$, esistono U, V aperti disgiunti di X tale che $C \subset U$ e $y \in V$. X si chiama *regolare* se è di Hausdorff e T_3.

2.9.2 esercizio : Sia $K \subset X$ chiuso e compatto, e lo contraggo ad un punto. Allora

1) X è di Hausdorff $\implies X/K$ è di Hausdorff.

2) X è localmente compatto $\implies X/K$ è localmente compatto.

3) X è a base numerabile $\implies X/K$ è a base numerabile.

soluzione :

1) Per ogni coppia di punti $x, y \in X/K$ dobbiamo trovare due aperti disgiunti $x \in U$ e $y \in V$. Chiamiamo $x_K = p(K)$, dove p è la proiezione al quoziente, se $x \neq x_K$ e $y \neq x_K$ allora è ovvio infatti, siano $p(x') = x$ e $p(y') = y$ allora siano $x' \in U'$ e $y' \in V'$ intorni disgiunti allora $x \in p(U'/K)$ e $y \in p(V'/K)$ sono intorni disgiunti. Allora assumiamo che $x = x_K$, allora mi basta trovare in X due aperti disgiunti U, V tale che $K \subset U$ e $y' \in V$ con $p(y') = y$. Ora per ogni $x \in K$ siano $x \in U_x$ e $y' \in V_x$ intorni aperti con $U_x \cap V_x = \emptyset$ (li trovo perchè X è di Hausdorff), si ha che $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} U_x$, K è compatto quindi $K \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_x = U$ e $y' \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_x = V$, U e V trovati adesso sono quelli che cercavamo.

2) Supponiamo che X sia localmente compatto, vediamo che K ammette un intorno compatto in X cioè vale a dire che esiste $H \subset X$ compatto con $K \subset H^\circ$ allora ho che $x_k \in p(H^\circ) \subset p(H)$ e $p(H)$ è un intorno compatto di x_k (per gli altri punti diversi da x_k è ovvio). Sia $x \in X$ e sia $x \in U_x$ intorno aperto tale che $\bar{U}_x$ è compatto allora $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$, K è compatto quindi $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_x$, sia allora $H = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_x$, è compatto e $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_x \subset H^\circ$.

3) Segue dall'esercizio precedente. Osserviamo che $p : X \longrightarrow X/K$ tale che $p(x_K) = P(K)$ è una applicazione chiusa.

2.9.1 osservazione : Se X è regolare allora X/C è T_2 per ogni $C \subset C$ chiuso.

2.9.2 esempio : $\mathbb{R}^n$ è regolare infatti sia C un chiuso e sia $y \in \mathbb{R}^n/C$, $\mathbb{R}^n/C$ è aperto quindi $\mathbb{R}^n/C \supset B_r(y) \supset \bar{B}_{r'}(y)$ (contiene un compatto) allora siano $U = \mathbb{R}^n/\bar{B}_{r'}(y)$ e $V = B_r(y)$ sono disgiunti e $C \subset U$ e $y \in V$ (La stessa dimostrazione la si applica in generale nel caso di X di Hausdorff e localmente compatto dunque uno spazio X di Hausdorff e localmente compatto è regolare).

2.9.3 esempio : Troviamo uno spazio T_2 ma non T_3. Consideriamo $K = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ e sia $\mathbb{R}_K = \mathbb{R}$ con la topologia i cui aperti sono gli aperti della topologia euclidea (a, b) e gli aperti $(a, b)/K$. Con questa topologia $\mathbb{R}$ è di Hausdorff perché ha gli aperti della topologia euclidea che quindi mi separano i punti, ma non è T_3 perché il chiuso K non lo posso separare da 0.

2.9.4 esempio : Vediamo che $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ non è localmente compatto (Considero $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$ e $\mathbb{R} = \{y = 0\}$). Sia $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ la proiezione al quoziente e $x_\mathbb{R} = p(\mathbb{R})$. Sia per assurdo $x_\mathbb{R} \in U$ un intorno compatto, allora $\mathbb{R} \subset C \subset p^{-1}(U)$ con C chiuso e quindi $p(C)$ è chiuso e siccome $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ è di Hausdorff $p(C) \subset U$ è compatto. Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\epsilon_n > 0$ tale che $\{n\} \times [0, \epsilon_n] \subset p^{-1}(U)$, considero allora il chiuso saturo(da vedere la scelta di C) $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} \times [0, \epsilon_n]$ come in figura

(Figura 50)

quindi $p(C)$ è compatto. Ora consideriamo V_n come l'aperto sotto il grafico della curva che interpola i punti medi di ogni ϵ_i con $i > n$ e passa sopra gli ϵ_j con $j \leq 0$ come il figura

(Figura 51)

V_n è aperto saturo e $\{V_n\}$ ricopre C ma non ammette sotto-ricoprimento finito quindi $p(V_n)$ aperto $\{p(V_n)\}$ ricopre $p(C)$ ma non ammette sotto-ricoprimento finito dunque $p(C)$ non è compatto assurdo.

2.9.3 esercizio : Vedere se $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è localmente compatto.

2.9.5 esempio : $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ Non è primo numerabile (N_1). Per assurdo sia $\{U_n\}$ un sistema fondamentale di intorni di $x_{\mathbb{R}}$ numerabile, costruiamo un aperto saturo in $\mathbb{R}^2$ che non contiene alcun $p^{-1}(U_n)$. Abbiamo che $\mathbb{R} \subset p^{-1}(U_n)$ quindi contiene i punti (n, ϵ_n) con $\epsilon_n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, consideriamo allora V come l'aperto sotto la curva che interpola gli (n, ϵ_n) come in figura

(Figura 52)

V è aperto saturo (da vedere come prima) ma $P(U) \not\supset U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2.9.4 esercizio : Sia X compattamente generato e sia $p : X \longrightarrow Y$ identificazione. Allora Y è compattamente generato.

soluzione : Ricordiamo che X è compattamente generato se per ogni $A \subset X$, A è aperto se e solo se $A \cap K$ aperto in K per ogni K compatto (L'implicazione $\Longleftarrow$ è quella non banale e che dimostreremo). Sia $A \subset Y$ tale che $A \cap K$ aperto in K per ogni $K \subset Y$ compatto, in particolare $A \cap p(H)$ è aperto in $p(H)$ per ogni $H \subset X$ compatto. Consideriamo $p_H : H \longrightarrow p(H)$ la restrizione della proiezione, è continua quindi $p^{-1}(A \cap p(H))$ è aperto in H per ogni $H \subset X$ compatto, ma $p^{-1}(A \cap p(H)) = p^{-1}(H) \cap H \Longrightarrow p^{-1}(H)$ aperto in X dunque $A \subset Y$ aperto.

2.9.5 esercizio : Sia X spazio $N_1 \Longrightarrow X$ è compattamente generato.

soluzione : Sia $C \subset X$ tale che $C \cap K$ è chiuso in K per ogni $K \subset X$ compatto, voglio mostrare che C è chiuso. Sia $x \in \bar{C}$ quindi esiste una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ tale che x_n tende a x, considero allora $K = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup x$, è compatto quindi siccome $C \cap K$ chiuso e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $x_n \in C \cap K$ allora $x \in C \cap K \Longrightarrow x \in C \Longrightarrow \bar{C} = C$ (abbiamo usato la caratterizzazione dei chiusi tramite successione ovvero C è chiuso in uno spazio N_1 se e solo se per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ tale che x_n tende a $x \in X$ allora $x \in C$).

2.9.2 osservazione : Abbiamo anche una caratterizzazione degli aperti tramite successione ovvero se X è N_1 allora $U \subset X$ è aperto se e solo se per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tale che x_n tende a x con $x \in U$ allora $x_n \in U$ per ogni $n \geq n_0$.

2.9.5 esercizio : Sia $f : X \longrightarrow Y$ con X spazio N_1. Allora f è continua se e solo se manda successioni convergenti in successioni convergenti.

2.9.6 esercizio : Sia U convesso e limitato in $\mathbb{R}^2$ allora $\mathbb{R}^2 \backslash U$ è connesso per archi.

soluzione : Siano $x, y \in \mathbb{R}^{\nvDash} \backslash U$ e consideriamo il segmento che li unisce, se il segmento non interseca U allora x, y sono collegati da un arco, se invece lo interseca allora consideriamo una circonferenza che circoscrive U, ed esiste perché U è limitato, allora se x, y sono entrambi esterni alla circonferenza considero l'arco come il pezzo di segmento che parte da x ed arriva all'intersezione della circonferenza, prosegue sulla circonferenza fino alla seconda intersezione e da qui prosegue sul segmento fino a y, se invece almeno uno è dentro la circonferenza, per esempio x, allora prolungo il segmento da x fino alla circonferenza, in questa operazione non dovrei ritoccare U perché se lo intersecassi allora x giace nel segmento che unisce due punti di U quindi per convessità tutto il segmento e quindi x è in U ma è assurdo perché per ipotesi x non appartiene ad U, dunque considero l'arco che parte da x prosegue sul prolungamento fino alla circonferenza e continua sulla circonferenza come prima, di seguito i tre casi

(Figura 53)

2.9.7 esercizio : Sia X spazio di Hausdorff e sia Y denso in X e localmente compatto allora Y è aperto in X.

*soluzione*1 : Sia $y \in Y$, siccome Y è localmente compatto esiste un intorno compatto K_y in Y di y allora $K_y = \bar{U}$ (perché Y sottospazio di un T_2 quindi è T_2 e quindi i compatti sono chiusi) con $y \in U \subset Y$. Per la topologia di sottospazio esiste $V \subseteq X$ aperto tale che $U = Y \cap V$, ora se $V \subseteq Y$ abbiamo fatto, se invece $V \nsubseteq Y$ considero $V \backslash \bar{U}$, questo è aperto perché $\bar{U}$ è compatto in Y quindi compatto in X ma X è T_2 quindi è chiuso e dunque $V \backslash \bar{U}$ è aperto, ma allora $Y \cap (V \backslash \bar{U}) = \emptyset$ è assurdo perché Y è denso e quindi interseca non banalmente ogni aperto.

*soluzione*2 : (da vedere) Consideriamo $p \in (X \bar{\backslash} Y) \backslash (X \backslash Y)$ e sia U un intorno compatto di p in Y, so che per ogni punto di $(X \bar{\backslash} Y) \backslash (X \backslash Y)$ esiste una successione in X che tende a quel punto inoltre (ogni punto ha una successione di cui è punto limite allora considero la successione che va a p ad un cero punto entra dentro U , ma U è compatto quindi tende a p quindi p è in Y assurdo allora X/Y è chiuso).(cio che ho scritto nel foglio : per esempio consideriamo in R^2 $Y = R^2$-segmento, il gioco sta nel derivato del derivato o derivato secondo di Y ovvero il derivato di Y è il segmento e il derivato del segmento sono gli estremi del segmento, se considero un intorno della frontiera del segmento so che esiste una successione che tende al punto del segmento, -(di mia interpretazione) allora considero la successione delle successioni che tendono al segmento-, ad un certo punto entrerà nell'intorno, ma l'intorno è compatto quindi la successione tende al punto del segmento ma U-segmento sta in Y e il segmento non sta in Y quindi assurdo perché significa che il punto del segmento sta in Y)

2.9.3 osservazione : (da vedere) Voglio trovare la derivata di $\sqrt{log(|sin(x)|)}$, osservo che $0 < |sin(x)| < 1$ quindi $log(|sin(x)|) \leq 0$ quindi il grafico della funzione sono dei punti corrispondenti alle $x = k\pi$ quindi non è derivabile.

2.9.8 esercizio : $\mathbb{R}^2\backslash[0,\infty)$ non è N_1 (neanche N_2).

soluzione : Supponiamo di si, sia $x_k = p([0,\infty))$ dove p è la proiezione al quoziente, se x_k ha un sistema fondamentale di intorni numerabile allora c'è l'ha anche $[0,\infty)$. Invado $[0,\infty)$ con dei compatti K_i e consideriamo $\{U_i\}$ sistema fondamentale di intorni numerabile per $[0,\infty)$ allora consideriamo U_1 e costruisco U_1' prendendo U_1 e levando un punto a $K_1\backslash[0,\infty)$, poi U_2' levando un punto a $K_2\backslash[0,\infty)$ e così via, a questo punto considero $U = \bigcup U_i'$ questo è un intorno di $[0,\infty)$ ma non contiene nessuno dei precedenti per costruzione (da vedere).

2.9.4 osservazione : Questo metodo non funziona in $\mathbb{R}$ perché è N_1 e la contraddizione sta nel fatto che se per esempio considero un sistema fondamentale di intorni numerabile $\{U_i\}$ di 0 allora da ogni intorno tolgo un punto U_i' e considero I come intersezione degli U_i' tutto come prima però i punti che ho tolto hanno formato una successione di buchi in I che tende a 0 quindi I non è un intorno perchńon contiene nessun aperto di $\mathbb{R}$ dato che non esiste nessuna palla di centro in 0 che stia dentro I e non interseca i punti tolti (da vedere - c'e un'altra contraddizione forse).

Rudimenti di topologia algebrica

Capitolo 3

Omotopia

3.1 Prime definizioni

Abbiamo visto nei precedenti paragrafi che i reali sono stati introdotti per la sistematizzazione della continuità, e abbiamo visto che la continuità è ben lontana dall'essere un concetto intuitivo, esiste una applicazione continua e surgettiva dal segmento al quadrato, sono due oggetti diversi con "dimensioni" diverse. Analogamente l'omotopia per come sarà definita è un concetto lontano dall'intuizione umana anche se per casi semplici la possiamo visualizzare.

3.1.1 Definizione : Siano $f, g : X \longrightarrow Y$ applicazioni continue tra spazi topologici. Si dice che f è *omotopa a g* $\Longrightarrow$ esiste $F : X \times I \longrightarrow Y$ tale che $F(x, 0) = f$ e $F(x, 1) = g$, graficamente come in figura :

(Figura 32)

3.1.1 osservazione : L'insieme I lo possiamo considerare come un tempo se siamo in un contesto fisico e quindi sin ha $F(x, t)$.

3.1.1 esempio : Siano $f, g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continue, supponiamo $f(0) = g(0) = A$ e $f(1) = g(1) = B$ come in figura

(Figura 33)

Ora considero $F(x, t) = f_t(x)$, e suppongo che per ogni t si ha $f_t(0) = A$ e $f_t(1) = B$, dunque $f_t(x)$ sono una famiglia continua di curve da A a B come in figura

(Figura 34)

e sono tutte omotope. L'esempio è abbastanza intuitivo, ma è un caso con molte restrizioni, potevo avere anche una curva di Peano tra A e B.

3.1.2 Definizione : Siano A, B due punti di uno spazio topologico Y, allora si chiama *omotopia relativa ad A e B* se l'applicazione $F(t,x) : I \times X \longrightarrow Y$ è tale che $F(t,0) = A$ e $F(t,1) = B$ come in figura.

(Figura 35)

Si tratta appunto della famiglia di tutte le applicazioni continue da A a B

(Figura 36)

Nelle sezioni precedenti abbiamo preso un insieme X e ci abbiamo costruito sopra una struttura di spazio topologico dopo di che abbiamo considerato delle applicazioni che preservassero la struttura di spazio topologico, e le abbiamo chiamate omeomorfismi, infine abbiamo cercato di classificare gli spazzi topologici in funzione di queste applicazioni ed abbiamo introdotto il concetto di compattezza e connessione che sono invarianti per omeomorfismo, ma non bastano, lo scopo dell'omotopia è trovare un invariante completo per omeomorfismi. Vogliamo capire la differenza topologica tra i vari spazi, per esempio la differenza tra un punto ed una retta sta nell'immagine di queste tramite un'applicazione, ovvero l'immagine di un punto è un punto e l'immagine di una retta può essere quello che le pare. Il segmento ed il quadrato non sono omeomorfi infatti il segmento meno un punto è sconnesso invece il quadrato meno un punto è connesso, un toro non è omeomorfo ad $\mathbb{R}^2$ in quanto quest'ultimo non è compatto ed il toro si, anche S^1 non è omeomorfo ad $S^1 \times S^2$, ragiono sempre studiando la connessione degli spazi meno un punto, (da vedere un S^1 nel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}$ e diverso da S^1 in un disco). Toro, quadrato pieno e sfera non sono omeomorfi, ma come li distinguo, i ragionamenti precedenti mi inducono a pensare che i "buchi" che ha uno spazio posso essere una chiave, questo oggetto verrà definito più chiaramente nei paragrafi successivi. (nel proiettivo una iperbole equilatera ha gli asintoti che si identificano, non sono tangenti all'infinito).

3.1.2 esempio : Una curva chiusa in un disco è omotopa ad un punto. Consideriamo il disco $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$ ed una applicazione $f : [0,1] \longrightarrow D$ tale che $f(0) = f(1)$ come in figura

(Figura 37)

e consideriamo il punto P, allora l'applicazione $F(x,t) = (1-t)f(x) + tP$ è tale che $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = P$. (da vedere D è convesso quindi tutto è omotopo ad un punto)

3.1.2 osservazione : Una omotopia non è quasi mai un omeomorfismo e talvolta possono essere omeomorfismi i vari livelli $f_t(x)$ dell'omotopia.

(da vedere non esiste un omeomorfismo $\gamma : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ che manda il nodo trifoglio in S^1 in quanto il loro complementari non sono omeomorfi) Definisco ora le *classi di omotopia* da S^1 a X spazio topologico. Considero $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ tale che $\gamma(0) = \gamma(1)$, fisso un punto x_0 e considero i *lacci* (applicazioni continue chiuse) che entrano ed escono da x_0, come in figura

(Figura 38)

3.1.3 Definizione : Siano $f(t)$ e $g(t)$ funzioni continue tale che $f(0) = f(1) = x_0$ e $g(0) = g(1) = x_0$, sono due lacci passanti per x_0 allora definisco $f * g = \left\{ \begin{smallmatrix} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{smallmatrix} \right.$ (da vedere metti nome operazione).

3.1.3 osservazione : se considero l'insieme dei lacci entranti ed uscenti per x_0 con l'operazione definita prima, questo non è un gruppo infatti se considero il cammino costante $g(t) = x_0$ che sarebbe il possibile elemento neutro allora $f * g \neq f$.

3.1.1 Teorema : Sia $\Omega(x_0)$ l'insieme dei *cammini* (lacci) entranti ed uscenti per x_0, diciamo che due cammini sono *omotopi modulo* x_0 ovvero se per ogni t si ha che $f_t(x_0) = x_0$ dove $f_t(x)$ è l'omotopia, come in figura

(Figura 39)

Allora se considero $\sim$ la relazione tale che $f \sim g$ se sono omotope modulo x_0 si ha che $\sim$ è di equivalenza e $(\Omega(x_0)/\sim, *)$ è un gruppo, detto $gruppo\ fondamentale\ di\ X\ in\ x_0$, in notazione $\pi_1(X, x_0)$, l'elemento neutro sono le classi di cammini omotopi a 0.

3.1.3 esempio : Considero $g(t) = x_0$ il cammino costante, si vede che $f * g \sim g$ quindi è l'elemento neutro, come si vede in figura

(Figura 40)

3.1.2 Teorema : Siano X_1 e X_2 spazi topologici. Sono omeomorfi se e solo se $\pi_1(X_1, x_0) = \pi_1(X_2, x_0)$ (da vedere).

3.1.4 Definizione : $\pi_1(X_1, x_0) = 0 \Longleftrightarrow X$ è *semplicemente connesso.*

3.1.4 osservazione : Non è detto che uno spazio semplicemente connesso sia contrattile ad un punto per esempio la sfera.

La difficoltà del gruppo fondamentale sta nel fatto che una folta rappresentato, ovvero esibiti i suoi generatori e le relazioni che vigono nel gruppo, non si può stabilire se il gruppo è banale, esiste un teorema che afferma che non esiste nessun algoritmo che può stabilire questa cosa.

3.1.4 esempio : L'intorno di una retta (ovvero un insieme che contiene un aperto che contiene la retta) nel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è un nastro di Möebius infatti un intorno in $\mathbb{R}^2$ è un nastro, quando passi al quoziente gli infiniti si identificano e si congiungono a formare il nastro. Se consideriamo $\pi_1(\mathbb{R}^3/\text{nodo trifoglio})$ è rappresentato da 3 generatori (da vedere) e per capire che non è banale si dimostra che il gruppo non è commutativo.

Analisi complessa

(Riferimenti bibliografici Manetti , Cartan) Da sistemare